

Bayerische
Staatsbibliothek
München

STATIK

DER

HOCHBAUCONSTRUCTIONEN.

DRITTER THEIL:

EISENCONSTRUCTIONEN.

VON

DR. W. WITTMANN,
PRIVATDOCENT AN DER KÖNIGL. TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN MÜNCHEN.

PREIS 5 M.

München, 1884.
M. Rieger'sche Universitäts-Buchhandlung.
(Gustav Himmer.)

2711K

ROBERTA GUSTAV JONEN

1907-1910

1911-1912

1913-1914

1915-1916

Inhalt.

I. Abschnitt.

Resultate der Festigkeitslehre.

§ 1 Zug- und Druckfestigkeit, zulässige Beanspruchung.	Seite
Festigkeitscoefficienten	1
Die Launhardt-Weyrauch'sche Dimensionenberechnung	3
Die Gerber'sche Dimensionenberechnung	6
Die Schäffer'sche Dimensionenberechnung	10
§ 2 Schubfestigkeit	13
§ 3 Biegezugfestigkeit.	
Trägheits- und Widerstandsmomente verschiedener Querschnittsformen	14
Tabellen von Profileisen nach dem deutschen Normalprofilbuch . .	16
Graphische Bestimmung der Trägheitsmomente	21
Aenderung des Trägheitsmomentes bei paralleler Verschiebung und bei	
Drehung der Axe, Hauptaxen, Maximal- und Minimalträgheitsmoment	24
Trägheitsellipse, Centralellipse	26
Mittelpunkt der Spannung, Neutralaxe, Zusammenhang beider . .	29
Kern eines Querschnitts	33
Maximum der Normalspannung	36
Normalspannungen und Schubspannungen in beliebiger Richtung,	
Hauptspannungen und Hauptschubspannungen, Spannungsellipse,	
ideelle Hauptspannung	39

II. Abschnitt.

Festigkeit der Schraubenbolzen- und Nietverbindungen.

Schraubenbolzenverbindungen	43
Nietverbindungen	44

III. Abschnitt.

Decken und Stützen.

§ 1 Blechbalkenträger	48
§ 2 Säulen	52
§ 3 Der Träger mit freischwebenden Stützpunkten	
A unter Einwirkung von ruhender Last	60
B unter Einwirkung von beweglicher Last	63
§ 4 Fachwerkträger	67

IV. Abschnitt.

Dachconstructionen.

§ 1 Belastung der Dächer	72
§ 2 Auflagerreactionen der Balkendächer	73
§ 3 Dachbinder nach dem englischen System	75
§ 4 Der Polonceau'sche Dachbinder	81
§ 5 Der deutsche Dachbinder	84
§ 6 Der parabolische Dachbinder	85
§ 7 Der parabolische sichelförmige Dachbinder	90
§ 8 Das Consoldach	94
§ 9 Der bogenförmige Dachbinder mit drei Gelenken	97
§ 10 Das Kuppeldach	105
§ 11 Das Zeltdach	109

V. Abschnitt.

Der elastische Bogenträger.

§ 1	Der stabförmige elastische Bogenträger unter Einfluss von ruhender Belastung	114
§ 2	Der stabförmige elastische Bogen bei beweglicher Belastung	124
§ 3	Der stabförmige elastische Bogen mit Kämpfergelenken	126
§ 4	Der stabförmige elastische Bogen mit drei Gelenken	128
§ 5	Der fachwerkförmige Bogenträger mit Kämpfergelenken	129
§ 6	Der fachwerkförmige Bogenträger ohne Gelenk	132

I. Abschnitt.

Resultate der Festigkeitslehre.

§ 1.

Zug- und Druck-Festigkeit, zulässige Beanspruchung.

Material	Kilogramm pro Quadratcentimeter							
	Bruchbelastung		Elasticitätsgrenze		Elasticitätsmodul		zulässige Beanspruchung	
	Zug α_0	Druck β_0	Zug	Druck	Zug ϵ	Druck ϵ	Zug α	Druck β
Schmiedeeisen . . .	3500	3500	1600	1600	2000000	2000000	750 bis 1000	750 bis 1000
Stahl	7300	6000	3000	2500	2750000	2750000	1200 bis 2000	1200 bis 2000
Gusseisen	1400	8000	600	1800	1000000	—	250	500
Eisendraht	7000	—	—	—	2100000	—	930	—
Stahldraht	13000	—	—	—	—	—	1800	—
Kupfer (gewalzt) .	2500	5000	450	450	1070000	1070000	250	500
Kupferdraht . . .	4500	—	1200	—	1210000	—	600	—
Messing	1200	750	500	—	640000	640000	250	150
Messingdraht . . .	3600	—	1300	—	987000	—	600	—
Blei (gewalzt) . .	130	500	100	—	50000	—	30	100
Zink (gewalzt) . .	900	—	500	—	—	—	180	100

Für Hochbauconstructionen, welche ausschliesslich durch ruhende, keinem Wechsel unterworfenene und nicht mit Stössen und Erschütterungen verbundene Belastung beansprucht sind, wird die zulässige Beanspruchung nach obiger Tabelle in der Regel mit 4 bis 6 facher Sicherheit angenommen. Es dienen alsdann für

Die Launhardt-Weyrauch'sche Dimensionenberechnung.

a) Die Beanspruchung findet immer im gleichen Sinne, also entweder **nur** als Zug oder **nur** als Druck statt.

Es bezeichne α_0 die der einmaligen Angriffnahme d. i. der ruhenden Last entsprechende Bruchbelastung eines Stabes von einer Quadrateinheit Querschnittsfläche. Setzt man den Stab einer Belastung aus, welche etwas kleiner ist als α_0 , so wird, um den Bruch herbeizuführen, eine gewisse Zahl von Wiederholungen nöthig sein, letztere zunächst in dem Sinne verstanden, dass der Stab nach jedermaliger Lasteinwirkung in den vollständig spannungslosen Zustand übergeht.

Die Zahl dieser Wiederholungen wird in demselben Grade wachsen, in welchem man die Beanspruchung vermindert und es ist für auf solche Weise abnehmende Belastung jedenfalls ein Grenzwert der Beanspruchung denkbar, bei welchem der Stab durch keine mögliche Anzahl Wiederholungen zerstört werden kann. Dieser Grenzwert sei α' und da die Beanspruchung zwischen ihm und Null wechselt, so ist die Spannungsdifferenz

$$\alpha_d = \alpha' - o = \alpha' (2)$$

In der Regel kehrt der Stab nicht in den spannungslosen Zustand zurück, sondern es bleibt irgend eine Minimalspannung α_a bestehen. Der diesem allgemeineren Falle entsprechende, in obigem Sinne aufzufassende Grenzwert der Beanspruchung sei α , dann ist, da die Spannungsdifferenz hier $\alpha_d = \alpha - \alpha_a$,

$$\alpha = \alpha_n + \alpha_d (3)$$

Nach dem Wöhler'schen Gesetze wächst nun α mit abnehmendem α_d und sind die beiden Grenzwerte von α nach (3) und nach den Definitionen von α' und α_0

für $\alpha_a = 0 \quad \alpha = \alpha_d = \alpha'$

und

für $\alpha_d = 0$ $\alpha = \alpha_n = \alpha_0$.

Da α eine Function von α_d ist, so kann gesetzt werden:

[illegible]

worin ν vorläufig noch unbekannt ist, jedoch den Bedingungen zu entsprechen hat, dass

für $\alpha_d = 0$ wegen $\alpha = \alpha_0$ nach Gl. (4) $\nu = \infty$

und für $\alpha_d = \alpha'$ wegen $\alpha = \alpha_d$ „ „ „ „ $\nu = 1$.

Diesen Bedingungen entspricht der Ausdruck:

$$\gamma = \frac{\alpha_0 - \alpha'}{\alpha_0 - \alpha},$$

welcher auch für die Zwischenwerthe hinreichende Uebereinstimmung mit den Versuchsergebnissen zeigt, so dass:

$$\alpha = \frac{\alpha_0 - \alpha'}{\alpha_0 - \alpha} \left(\alpha - \alpha_a \right)$$

und hieraus:

$$a = a' \left(1 + \frac{a_0 - a'}{a'} \frac{a_{11}}{a} \right).$$

Bezeichnen nun $P_{\min}$ und $P_{\max}$ die Grenzbeanspruchungen eines Constructionstheils, so ist

$$\frac{a_a}{a} = \frac{P_{\min}}{P_{\max}}$$

und
$$\alpha = \alpha' \left(1 + \frac{\alpha_0 - \alpha'}{\alpha'} \frac{P_{\min}}{P_{\max}} \right), \quad (5)$$

welche Formel Gültigkeit hat für Constructionstheile, welche entweder ausschliesslich auf Zug oder ausschliesslich auf Druck beansprucht sind. *) Was die Constanten des vorstehenden Ausdrucks anlangt, so ergaben die Wöhler'schen Versuche für Schmiedeisen in Kilogramm pro Quadratcentimeter $\alpha_0 = 3290$ und $\alpha' = 2195$, daher $\frac{\alpha_0 - \alpha'}{\alpha'} = \frac{3290 - 2195}{2195} = \frac{1}{2}$

und, nach unten abgerundet:

$$\alpha = 2190 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{P_{\min}}{P_{\max}} \right).$$

Wird mit Rücksicht auf Stösse und Erschütterungen, Fehler im Material u. s. w. dreifache Sicherheit angenommen, so ergibt sich die zulässige Beanspruchung in *kg p. qcm*:

$$\alpha = 700 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{P_{\min}}{P_{\max}} \right) \quad (V \text{ (Schmiedeisen nur Zug od. Druck.)})$$

Für Stahl ist $\alpha_0 = 7340$ und $\alpha' = 3510$, daher $\frac{\alpha_0 - \alpha'}{\alpha'} = \frac{7}{6}$

und
$$\alpha = 3510 \left(1 + \frac{7}{6} \frac{P_{\min}}{P_{\max}} \right),$$

demnach mit dem Sicherheitscoefficienten $\frac{1}{3}$

$$\alpha = 1100 \left(1 + \frac{9}{11} \frac{P_{\min}}{P_{\max}} \right) \quad (V' \text{ (Stahl, nur Zug od. nur Druck.)})$$

Für Stäbe, welche nur durch ruhende Belastung beansprucht sind, folgt aus V und V'

bei Schmiedeisen: $\alpha = 700 \left(1 + \frac{1}{2} \right) = 1050 \text{ kg p. qcm}$

und bei Stahl: $\alpha = 1100 \left(1 + \frac{9}{11} \right) = 2000 \text{ kg p. qcm.}$

b) Die Beanspruchung eines Constructionstheils wechselt zwischen Zug und Druck. **)

Es wurde hier von Wöhler besonders der specielle Fall untersucht, dass die entgegengesetzten Beanspruchungen der Grösse nach gleich sind und soll hiefür die Festigkeit α , als „Schwingungsfestigkeit“ bezeichnet werden. Wenn die Beanspruchung in einem Sinne gleich Null ist, so geht die Festigkeit in den früheren Werth α' über.

Wird ein Stab von der Querschnittsfläche $= 1$ abwechselnd auf Zug und Druck beansprucht, so gibt es für jeden Werth α der grösseren dieser beiden Spannungen einen bestimmten Werth α'' der kleineren derart, dass bei der grössten vorkommenden Anzahl von Schwingungen zwischen $\pm \alpha$ und $\mp \alpha''$ die Festigkeit des Materials nicht zerstört wird. Die Spannungsdifferenz α_d ist dann gleich $\alpha_d = \alpha + \alpha''$,

daher
$$\alpha = \alpha_d - \alpha'', \quad (6)$$

wenn alle Grössen nur dem Zahlenwerthe nach eingesetzt werden.

*) Zeitsch. d. Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 1873 S. 139.

**) Weyrauch, Festigkeit und Dimensionenberechnung der Eisen- und Stahlconstructionen. Leipzig, Teubner 1876.

Man hat $P_{\min} = +1200$ und $P_{\max} = 18000$ *kg*, daher nach (V)

$$\alpha = 700 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1200}{18000} \right) = 723 \text{ kg},$$

$$\text{und Querschnittsfläche } F = \frac{P_{\max}}{\alpha} = 24,9 \text{ qcm}$$

2. Der Stab erleide durch ruhende Last einen Druck von 2000 *kg* und durch Verkehrslast einen grössten Druck von 14000 *kg*.

$$P_{\min} = -2000 \text{ kg und } P_{\max} = -16000 \text{ kg.}$$

$$\text{Nach (V) ist } \alpha = 700 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2000}{16000} \right) = 744 \text{ kg},$$

$$\text{daher } F = \frac{16000}{744} = 21,5 \text{ qcm.}$$

3. Die ständige Last erzeuge in dem Stab die Zugwirkung 4000 *kg*, die Verkehrslast einen grössten Druck von 14000 *kg*.

$$\text{Da hier } P'_{\max} = +4000 \text{ kg und } P_{\max} = -10000 \text{ kg,}$$

$$\text{so ist nach (VIII) } \alpha = 700 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{4000}{10000} \right) = 560 \text{ kg}$$

$$\text{und } F = \frac{10000}{560} = 17,9 \text{ qcm}$$

Die Gerber'sche Dimensionenberechnung. *)

Bezeichnen P_v und P_q die durch die ständige Last und die durch wechselnde Belastung entstehende Beanspruchung eines Stabes, oder mit anderen Worten, sind P_v und $P_v + P_q$ die beiden Belastungsgrenzen, so hat man für den Fall des Gleichgewichtes:

$$P_v + \tau P_q = \alpha_0 F, \quad (9)$$

wenn τ den Coefficienten bezeichnet, mit welchem die wechselnde Belastung zu multipliciren ist, um sie in eine ihrer gefährlicheren Wirkungsweise äquivalente ruhende Belastung zu verwandeln.

Wie oben ist α_0 die der ruhenden Belastung entsprechende Festigkeitsgrenze.

$$\text{Setzt man } \frac{P_v}{P_q} = \varphi, \text{ so folgt aus (9)}$$

$$(\varphi + \tau) P_q = F \alpha_0,$$

und, wenn $\varphi + \tau = \sigma$ gesetzt wird,

$$F = \sigma \frac{P_q}{\alpha_0}, \quad (10)$$

welche Gleichung zur Querschnittsbestimmung dient, sobald σ bekannt ist, d. h. der jedem Verhältniss $\frac{P_v}{P_q}$ zugehörige Werth von τ ermittelt ist.

Nach dem Wöhler'schen Gesetz gibt es für jede Spannungsgrenze eine andere Grenze, für welche der Bruch nicht mehr eintritt, selbst bei unbeschränkt vielen

*) Bestimmung der zulässigen Spannung in Eisenconstructions, Zeitsch. d. bayer-Arch.- und Ing.-Vereines 1874.

Wiederholungen. Wird von zwei, in solcher Weise zusammengehörigen Spannungswerthen jener als Anfangsspannung betrachtet, aus welchem der andere Werth durch Hinzufügung einer positiven Differenz α_d entsteht, so ist

für die Anfangsspannung $+\alpha_a$ die Endspannung: $+\alpha_a + \alpha_d$ und

für die Anfangsspannung $-(\alpha_a + \alpha_d)$ die Endspannung: $-\alpha_a$;

es entsprechen also einer und derselben Spannungsdifferenz α_d immer zwei Anfangsspannungen $+\alpha_a$ und $-(\alpha_a + \alpha_d)$.

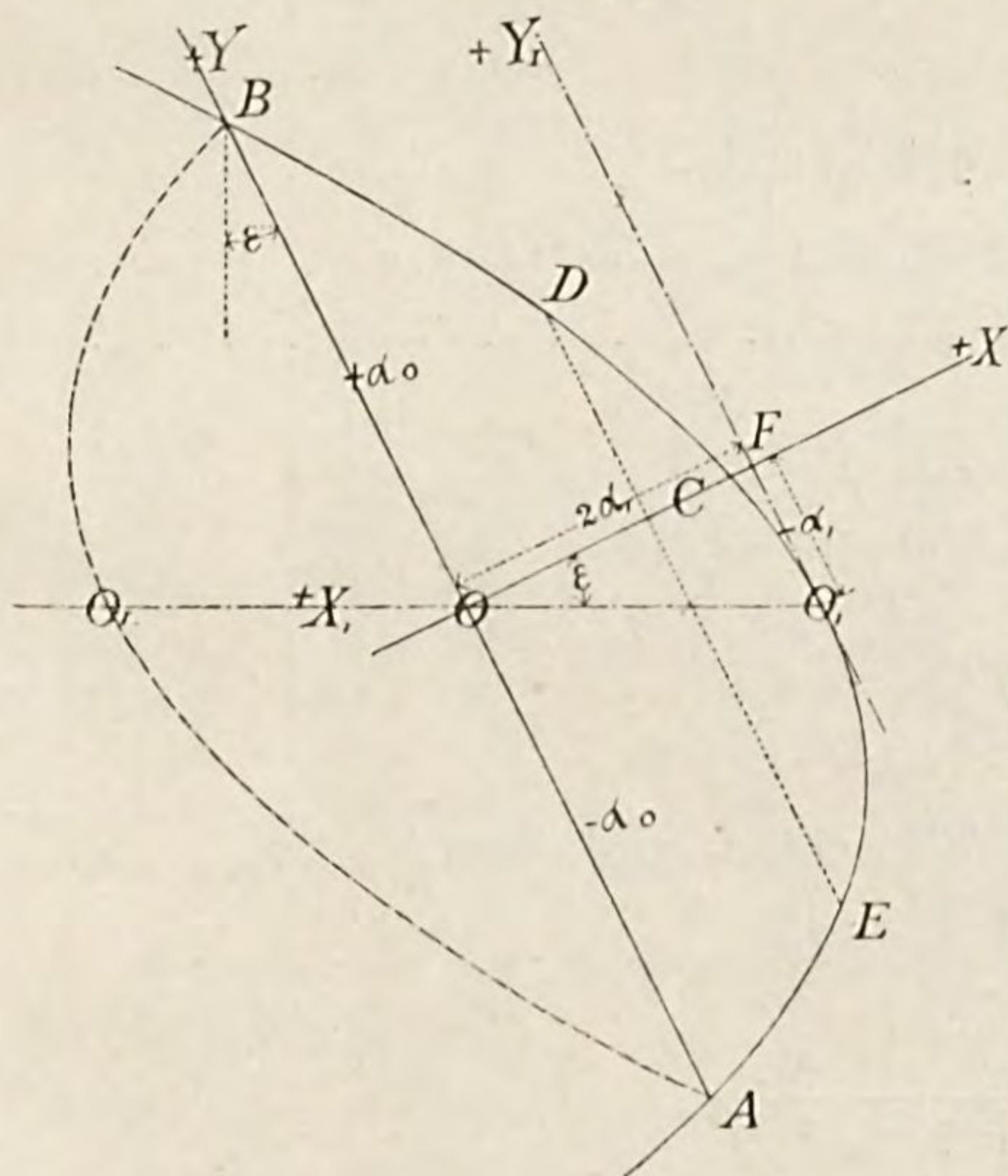
Wechselt die Beanspruchung zwischen den beiden, der Grösse nach gleichen, dem Vorzeichen nach entgegengesetzten Spannungen $-\alpha_r$ und α_r , so hat man (die Spannungsdifferenz immer positiv genommen) für die Anfangsspannung $-\alpha_r$ die Spannungsdifferenz $\alpha_d = +2\alpha_r$, oder für die Spannungsdifferenz $2\alpha_r$ die Anfangsspannung $-\alpha_r$.

Endlich ist für die Anfangsspannung $\pm\alpha_0$ (Bruchspannung bei constanter Belastung) auch die Endspannung $= \pm\alpha_0$, d. h. die Spannungsdifferenz gleich Null.

Für ein rechtwinkliges Coordinatensystem, in welchem die y die Anfangsspannungen und die x die zugehörigen Spannungsdifferenzen vorstellen, hat man also

$$\begin{aligned} \text{für } x = +\alpha_d & \quad \begin{cases} y = +\alpha_a \\ y = -(\alpha_a + \alpha_d) \end{cases} \\ \text{„ } x = 0 & \quad y = \pm\alpha_0 \\ \text{„ } x = +2\alpha_r & \quad y = -\alpha_r \end{aligned}$$

Fig. 1.



und x und y können als Coordinaten einer Curve betrachtet werden, welche das Gesetz der Veränderlichkeit von Anfangsspannung und Spannungsdifferenz zum Ausdruck bringt. Es ist ersichtlich, dass die Curve bei $x = +2\alpha_r$ in Bezug auf Y ein Maximum erreicht, indem die für alle kleineren Werthe von x sich ergebenden beiden y Werthe hier in einen zusammenfallen.

Die einfachste Curve, welche vorstehenden Bedingungen entspricht, ist die Parabel. Zieht man nämlich Fig. 1 die Sehne AB so, dass $\tan \varepsilon = \frac{1}{2}$, so hat man im rechtwinkligen Axenkreuz YOX für jede Abscisse $x = OC$ zwei Ordinaten: $+CD$ und $-CE = -(CD + 2CO \tan \varepsilon) = -(CD + OC)$,

welche also die Bedingung erfüllen, dass für einen und denselben Werth von x zwei y -Werthe, nämlich y und $-(y + x)$ vorhanden sind. Ferner ist für $x = 0$ $y = +OB = -OA$ und für $x = OF$ $y = -FO = -\frac{OF}{2}$. *)

*) Für negative Spannungsdifferenzen x erhält man die in Fig. 1 punctirt angedeutete Parabel $A O' B$.

Die Parabelgleichung, bezogen auf O, X , u. O, Y , ist:

$$y^2 = 4 r_0 x,$$

und da man zur Transformation des schiefen Systems Y, O, X , auf das rechtwinklige Axensystem $Y O X$ hat:

$$y_1 = y + \frac{x}{2} \\ \text{und } x_1 = \frac{1}{\cos \varphi} (2 \alpha_1 - x),$$

so ist die Parabelgleichung für letzteres System:

$$y^2 + x y + \frac{x^2}{4} = \frac{4 r_0}{\cos \varphi} (2 \alpha_1 - x),$$

oder, weil für $x = 0$ $y = \pm \alpha_0$

$$\text{und } \frac{4 r_0}{\cos \varphi} = \frac{\alpha_0^2}{2 \alpha_1},$$

$$y^2 + x y + \frac{x^2}{4} + \frac{\alpha_0^2}{2 \alpha_1} x = \alpha_0^2.$$

da $x = \alpha_1$ und $y = \alpha_0$

so kann aus vorstehender Gleichung, welche hinreichende Uebereinstimmung mit den Versuchsergebnissen zeigt, die jeder gegebenen Anfangsspannung zugehörige Endspannung gefunden werden.

Zur Vermeidung der für die Anwendung unbequemen Auflösung der quadratischen Gleichung wurde von Gerber folgende Umformung vorgenommen:

$$\text{Man setzt } \frac{x}{\alpha_0} = \xi, \frac{y}{\alpha_0} = \eta \text{ und } \frac{2 \alpha_1}{\alpha_0} = \eta'$$

so nimmt die Gleichung die Form an:

$$\eta^2 + \frac{1}{4} \xi^2 + \xi \eta + \frac{\xi}{\eta'} = 1 \quad (11)$$

oder für Schmiedeeisen, für welches $\alpha_1 = 1170$ und $\alpha_0 = 3500 \text{ kg p. qcm}$,

$$\eta^2 + \frac{1}{4} \xi^2 + \xi \eta + \frac{3}{2} \xi = 1 \quad (12)$$

$$\text{Da } \xi = \frac{P_q}{F \alpha_0} \text{ und } \eta = \frac{P_v}{F \alpha_0}$$

so ist $P_q = F \xi \alpha_0$ und $P_v = F \eta \alpha_0$

daher nach Gl. (9):

$$F \eta \alpha_0 + \tau F \xi \alpha_0 = \alpha_0 F,$$

oder

$$\eta + \tau \xi = 1.$$

Aus diesem Ausdruck folgt, wenn berücksichtigt wird, dass $\frac{\eta}{\xi} = \varphi$,

$$\xi = \frac{1}{\tau + \varphi} = \frac{1}{\sigma}$$

$$\text{und } \eta = \frac{\varphi}{\tau + \varphi} = \frac{\varphi}{\sigma}.$$

Letztere Werthe in Gl. (12) eingesetzt ergeben:

$$\sigma^2 - \frac{3}{2} \sigma = \varphi^2 + \varphi + \frac{1}{4},$$

$$\text{woraus } \sigma = \frac{1}{4} (3 + \sqrt{9 + 4 (2 \varphi + 1)^2}) \quad (13)$$

Mittels dieser Gleichung ist nachstehende Tabelle berechnet, aus welcher für jeden gegebenen Werth $\varphi = \frac{P_v}{P_q}$ der zugehörige Werth σ entnommen, in Gleichung (10) eingesetzt und hieraus F erhalten werden kann.

oder

$$\frac{\alpha_a}{\alpha_0} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\alpha_d}{\alpha_0} \pm \sqrt{4 - 6 \frac{\alpha_d}{\alpha_0}} \right).$$

Da

$\alpha_a + \alpha_d = \alpha$, so folgt hieraus:

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_d}{\alpha_0} \pm \sqrt{4 - 6 \frac{\alpha_d}{\alpha_0}} \right),$$

welche Gleichung leicht auf die Form:

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{-3 \frac{\alpha_d}{\alpha} \pm \sqrt{13 \frac{\alpha_d^2}{\alpha^2} - 16 \frac{\alpha_d}{\alpha} + 16}}{\left(2 - \frac{\alpha_d}{\alpha}\right)^2} \quad (17)$$

gebracht werden kann.

Für positive $\frac{\alpha_d}{\alpha}$ ist nur das positive, für negative $\frac{\alpha_d}{\alpha}$ nur das negative Zeichen vor der Wurzel zu benützen.

Aus dieser Gleichung kann die Unbekannte α gefunden werden, nachdem durch (16') $\frac{\alpha_d}{\alpha}$ bestimmt ist. Um aber alle durch unvermeidliche Ungenauigkeiten der Ausführung, Fehlerhaftigkeit des Materials u. dgl. entstehenden Einflüsse zu berücksichtigen wird, wie bei Gerber, für α_0 mit Bezugnahme auf die Elasticitätsgrenze 1600 kg gesetzt, sonach:

$$\alpha = 1600 \frac{-3 \frac{\alpha_d}{\alpha} \pm \sqrt{13 \frac{\alpha_d^2}{\alpha^2} - 16 \frac{\alpha_d}{\alpha} + 16}}{\left(2 - \frac{\alpha_d}{\alpha}\right)^2} \quad (17')$$

Für den Querschnitt ergibt sich sodann:

$$F = \frac{P_v + 1,5 P_{q \max}}{\alpha}$$

Nachfolgende Tabelle enthält die nach Gl. (17') berechneten Werthe von α für fortlaufende $\frac{\alpha_d}{\alpha}$

$\frac{\alpha_d}{\alpha}$	α	Diff.	$\frac{\alpha_d}{\alpha}$	α	Diff.	$\frac{\alpha_d}{\alpha}$	α	Diff.	$\frac{\alpha_d}{\alpha}$	α	Diff.
0.0	1600	43	2.0	534	26	4.0	260	7	10.0	100	34
0.1	1557	51	2.1	508	23	4.1	253	6	15.0	66	17
0.2	1506	57	2.2	485	22	4.2	247	7	20.0	49	10
0.3	1449	63	2.3	463	20	4.3	240	5	25.0	39	7
0.4	1386	67	2.4	443	18	4.4	235	6	30.0	32	4
0.5	1319	71	2.5	425	17	4.5	229	5	35.0	28	4
0.6	1248	72	2.6	408	16	4.6	224	5	40.0	24	5
0.7	1176	72	2.7	392	14	4.7	219	5	50.0	19	2
0.8	1104	71	2.8	378	14	4.8	214	4	60.0	17	3
0.9	1033	64	2.9	364	13	4.9	210	4	70.0	14	2
1.0	969	62	3.0	351	12	5.0	206	19	80.0	12	1
1.1	907	58	3.1	339	11	5.5	187	17	90.0	11	1
1.2	849	53	3.2	328	10	6.0	170	14	100.0	10	5
1.3	796	49	3.3	318	10	6.5	156	11	200.0	5	2
1.4	747	44	3.4	308	9	7.0	145	11	300.0	3	1
1.5	703	41	3.5	299	9	7.5	134	8	400.0	2	
1.6	662	37	3.6	290	8	8.0	126	8			
1.7	625	33	3.7	282	8	8.5	118	6	∞	0	
1.8	592	30	3.8	274	7	9.0	112	6			
1.9	562	28	3.9	267	7	9.5	106	6			

Die Zahlen dieser Tabellen gelten von $\frac{\alpha_d}{\alpha} = 0$ bis $\frac{\alpha_d}{\alpha} = 1$ für Beanspruchung auf Zug beziehungsweise Druck; von $\frac{\alpha_d}{\alpha} = 1$ bis $\frac{\alpha_d}{\alpha} = \infty$ für Wechsel zwischen Zug und Druck.

Beispiele.

1. Ein schmiedeiserner Stab habe eine durch stetige Belastung hervorgerufene Zugkraft von 1200 *kg* und eine grösste durch den Verkehr bewirkte Zugkraft von 16800 *kg* aufzunehmen.

Es ist $P_v = 1200$, $P_{q \max} = 16800$ und $P_{q \min} = 0$

daher nach (16') $\frac{\alpha_d}{\alpha} = \frac{1,5 \cdot 16800}{1200 + 1,5 \cdot 16800} = 0,954$

und hieraus nach der Tabelle S. 11: $\alpha = 998$,

somit $F = \frac{1200 + 1,5 \cdot 16800}{998} = 26,45 \text{ qcm.}$

2. Der Stab erleide durch ruhende Last einen Druck von 2000 *kg* und durch Verkehrslast einen grössten Druck von 14000 *kg*.

Es ist $P_v = -2000 \text{ kg}$, $P_{q \max} = -14000 \text{ kg}$ und $P_{q \min} = 0$,

daher $\frac{\alpha_d}{\alpha} = \frac{1,5 \cdot 14000}{2000 + 1,5 \cdot 14000}$

und $\alpha = 1025$,

daher $F = \frac{2000 + 21000}{1025} = 22,44 \text{ qcm.}$

3. Durch die ständige Last entstehe eine Zugwirkung von 4000 *kg* und durch die Verkehrslast ein grösster Druck von 14000 *kg*.

Es ist $P_v = +4000 \text{ kg}$, $P_{q \min} = -14000 \text{ kg}$ und $P_{q \max} = 0$,

daher $\frac{\alpha_d}{\alpha} = \frac{1,5 \cdot 14000}{4000} = 5,25$

und $\alpha = 196$,

daher $F = \frac{4000}{196} = 20,4 \text{ qcm.}$

4. Ein schmiedeiserner Stab, welcher durch die ständige Last einen Zug von 6000 *kg* erhält, werde durch Verkehrslast beansprucht, welche zwischen den Grenzen + 20000 und - 12000 *kg* wechselt.

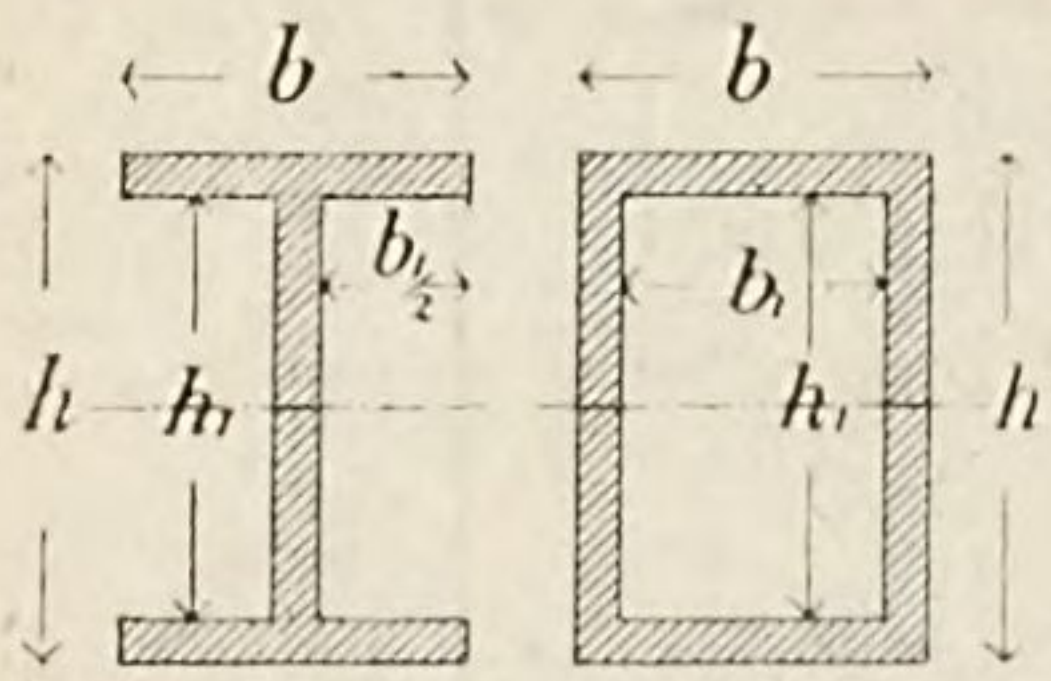
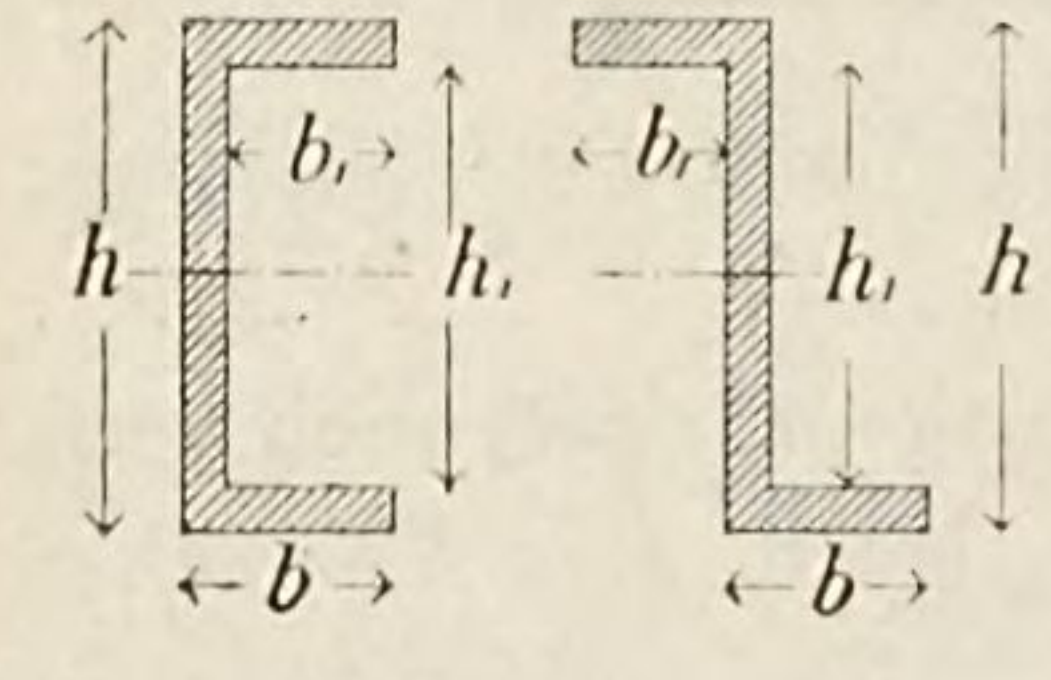
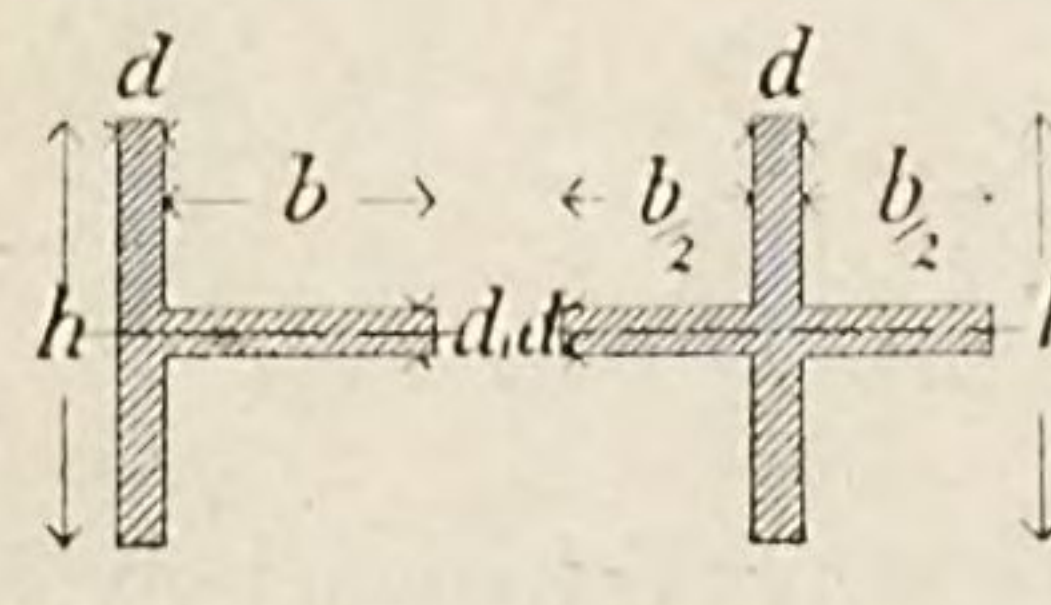
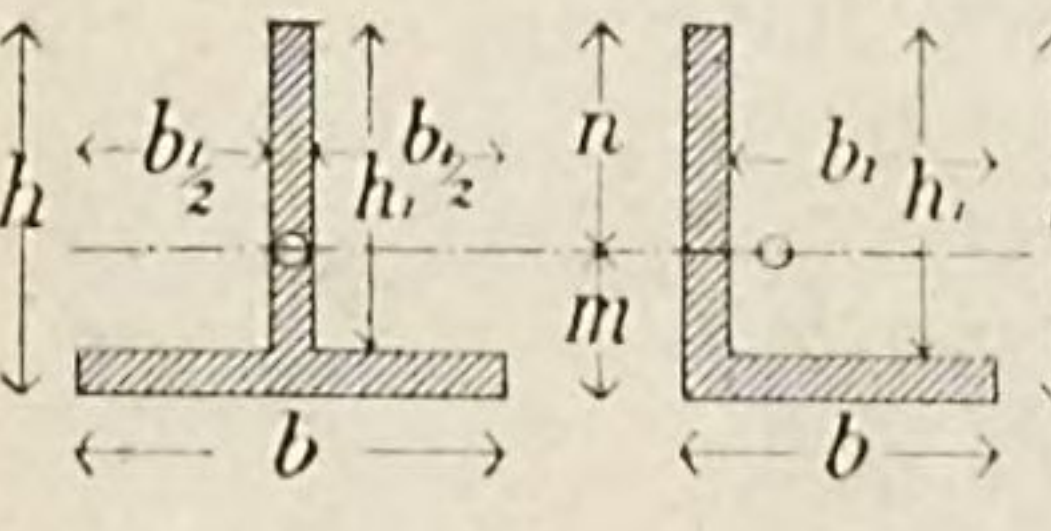
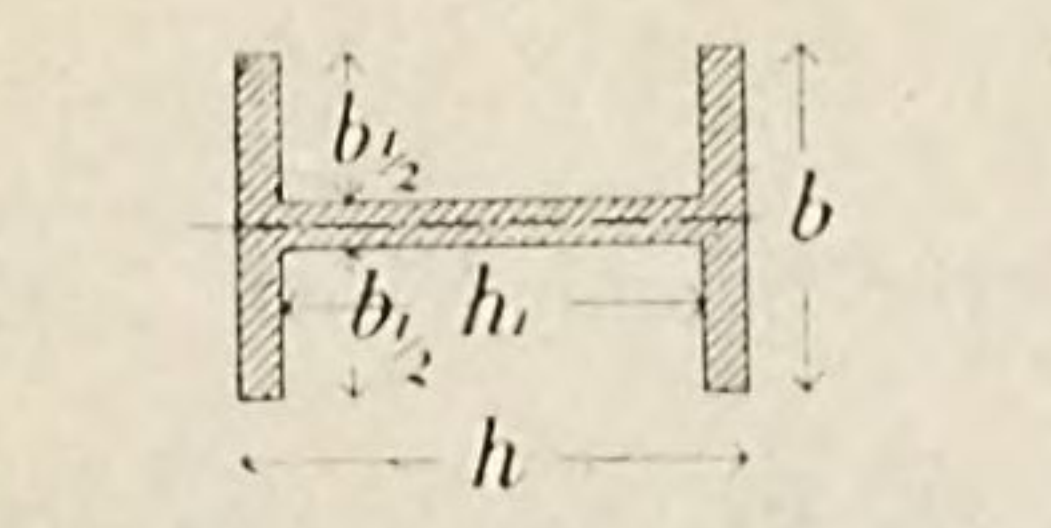
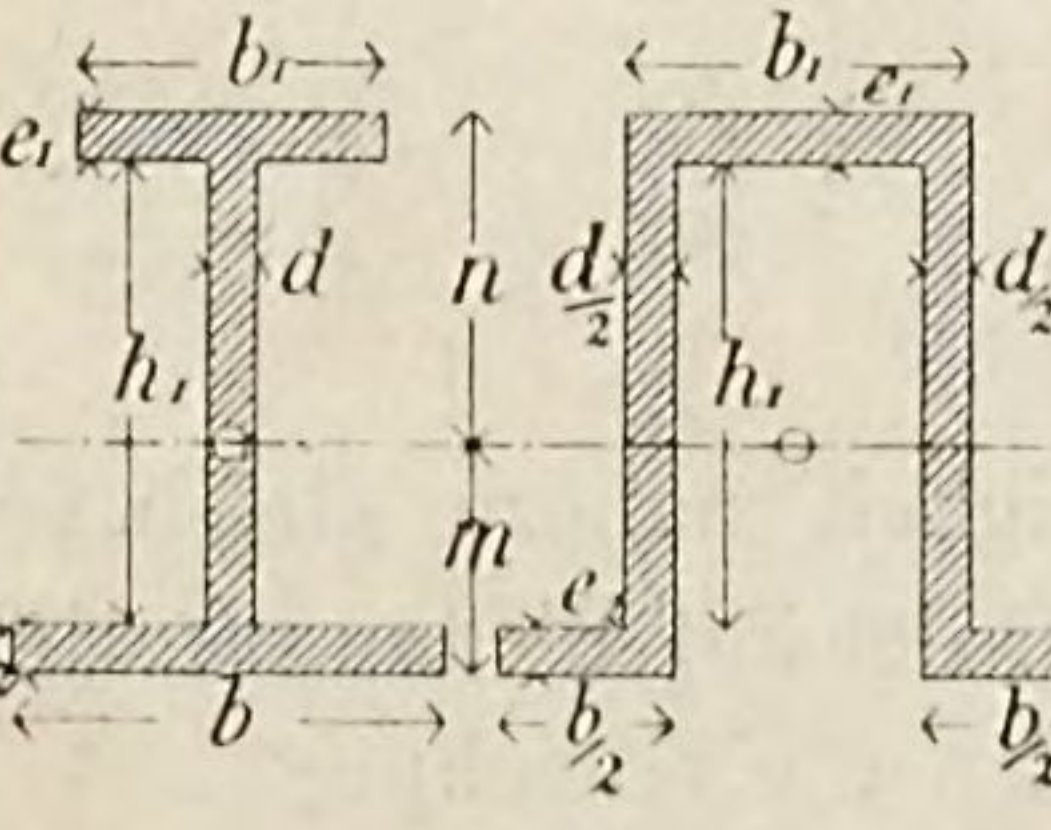
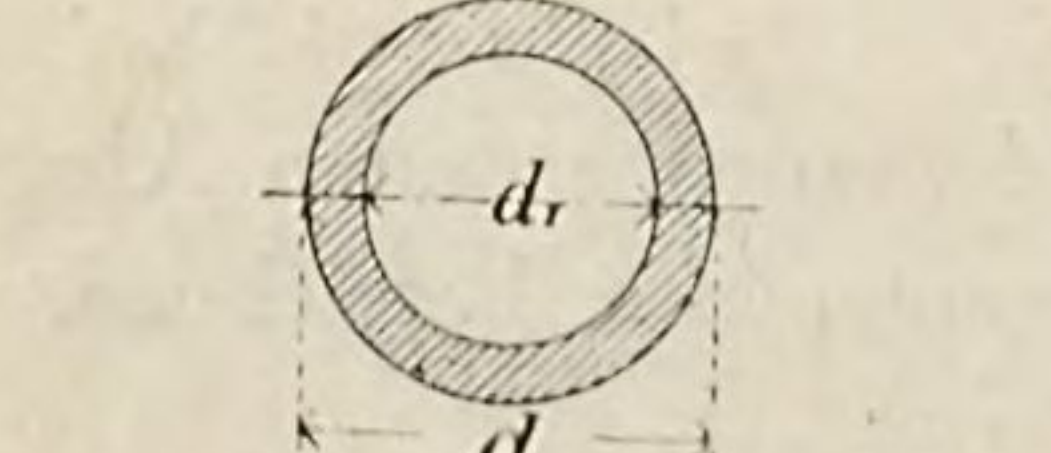
Da $P_v = +6000$, $P_{q \max} = +20000$ und $P_{q \min} = -12000$,

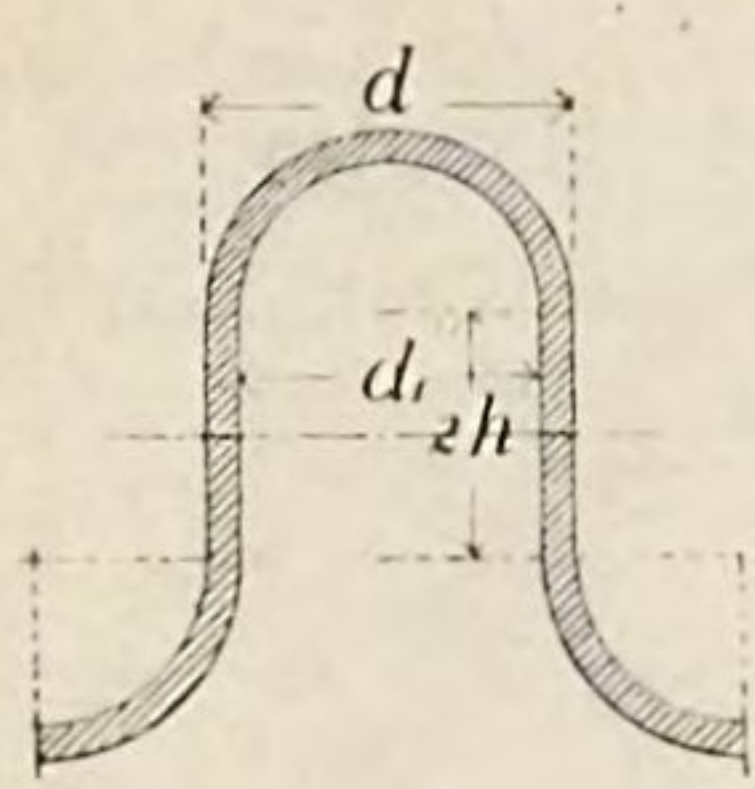
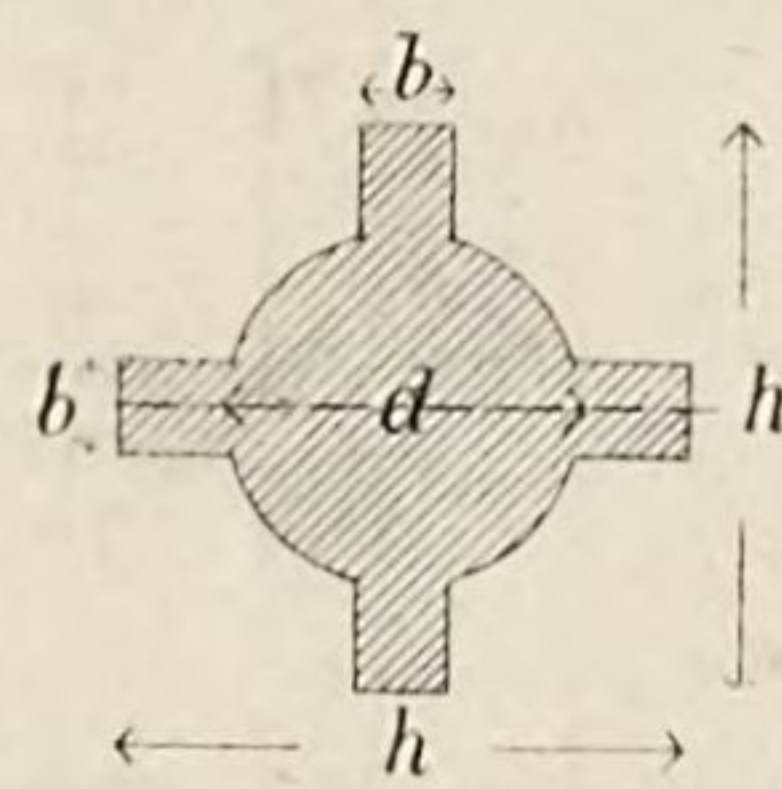
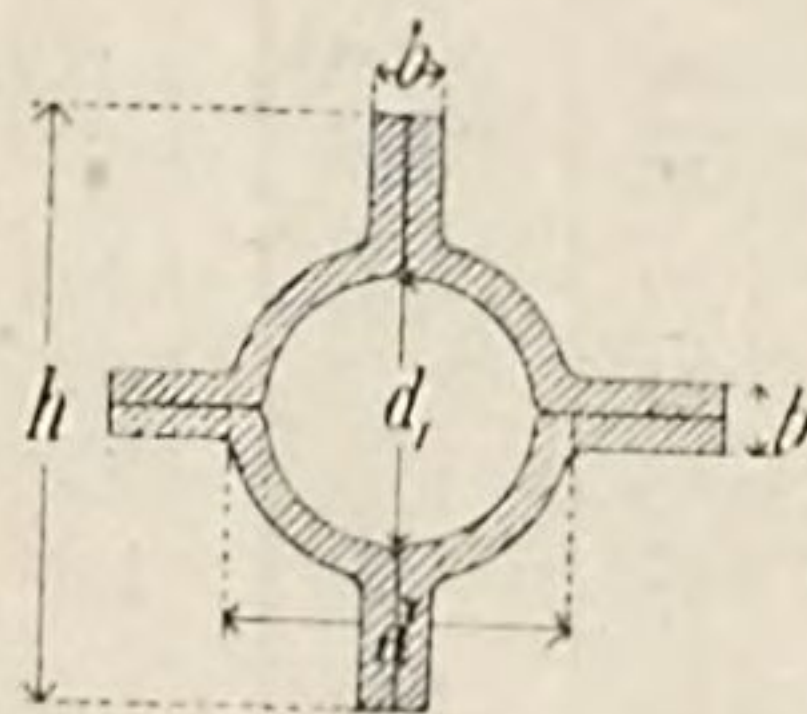
so ist $\frac{\alpha_d}{\alpha} = \frac{1,5 (20000 + 12000)}{6000 + 1,5 \cdot 20000} = 1,333$

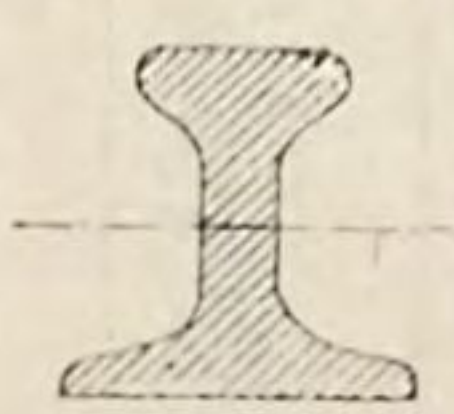
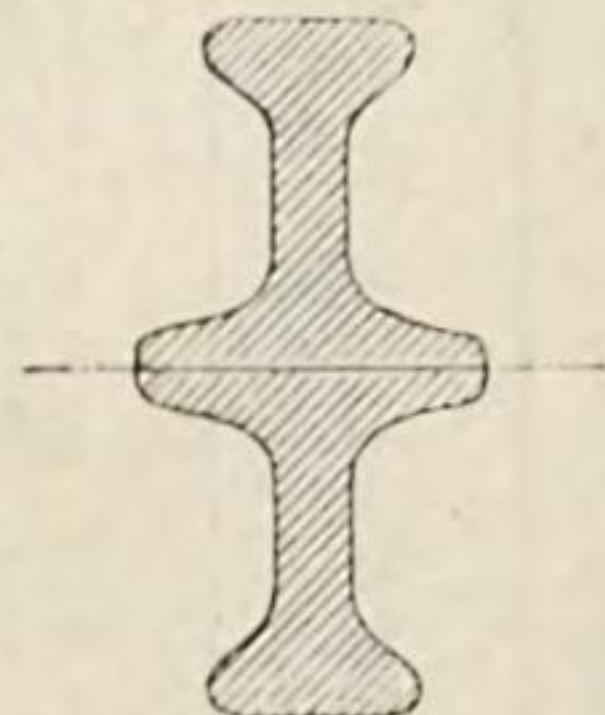
und $\alpha = 780$,

daher $F = \frac{6000 + 1,5 \cdot 20000}{780} = 46,1 \text{ qcm.}$

Trägheits- und Widerstandsmomente einiger Querschnittsformen.

Querschnitt	Trägheitsmoment Θ bezogen auf die Schwerpunktsaxe	m	$\frac{\Theta}{m}$
	$\frac{1}{12} (bh^3 - b_1 h_1^3)$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6} \frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{h}$
			
	$\frac{1}{12} (dh^3 + b d_1^3)$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6} \frac{dh^3 + b d_1^3}{h}$
	$\frac{1}{12} (bh^3 - b_1 h_1^3) - 4bh b_1 h_1 (h - h_1)^2$ oder: $\frac{1}{3} \{ (b - b_1) n^3 + b m^3 - b_1 [m - (h - h_1)]^3 \}$	$\frac{1}{2} \frac{bh^2 - b_1 h_1^2}{bh - b_1 h_1}$	$\frac{1}{6} \left[\frac{bh^2 - b_1 h_1^2}{bh - b_1 h_1} - \frac{4bh b_1 h_1 (h - h_1)^2}{b h^2 - b_1 h_1^2} \right]$
	$\frac{1}{12} \left[(h - h_1) b^3 + h_1 (b - b_1)^3 \right]$	$\frac{b}{2}$	$\frac{1}{6b} \left[(h - h_1) b^3 + h_1 (b - b_1)^3 \right]$
	$\frac{1}{3} \left[b_1 n^3 - (b_1 - d) (n - e_1)^3 + b m^3 - (b - d) (m - e_2)^3 \right]$	$\frac{b_1 e_1^2 + d h_1 (h_1 + 2 e_1) + b e_2 (e_2 + 2 h_1 + 2 e_1)}{2 (b e_2 + b_1 e_1 + d h_1)}$	
	$\frac{\pi}{64} (d^4 - d_1^4)$	$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi (d^4 - d_1^4)}{32 d}$

Querschnitt	Trägheitsmoment Θ bezogen auf die Schwerpunktsaxe	m	$\frac{\Theta}{m}$
	$\frac{\pi}{64} (d^4 - d_1^4) + \frac{h^2 \pi}{4} (d^2 - d_1^2) + \frac{h}{3} (d^3 - d_1^3) + \frac{2}{3} (d - d_1) h^3$	$h + \frac{d}{2}$	$\frac{1}{h + \frac{d}{2}} \left[\frac{\pi}{64} (d^4 - d_1^4) + \frac{h^2 \pi}{4} (d^2 - d_1^2) + \frac{h}{3} (d^3 - d_1^3) + \frac{2}{3} (d - d_1) h^3 \right]$
	$\frac{1}{12} \left[\frac{3}{16} \pi d^4 + b (h^3 - d^3) + b^3 (h - d) \right]$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6h} \left[\frac{3}{16} \pi d^4 + b (h^3 - d^3) + b^3 (h - d) \right]$
	$\frac{1}{12} \left[\frac{3}{16} \pi (d^4 - d_1^4) + b (h^3 - d^3) + b^3 (h - d) \right]$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6h} \left[\frac{3}{16} \pi (d^4 - d_1^4) + b (h^3 - d^3) + b^3 (h - d) \right]$

	Eisenbahnschienen von durchschnittl. 9,15 cm Basis und 5,5 cm Kopf- breite	Höhe	Gewicht pro lfd. m	Θ für cm	$\frac{\Theta}{m}$ für cm
		13.0	36	919	130
		11.8	34	690	117
		10.5	32	472	95
	zwei desgl. auf- einander genietet	13.0	72	5521	422
		11.8	68	4083	347
		10.5	64	2812	268

Tabellen über einige Profileisen,

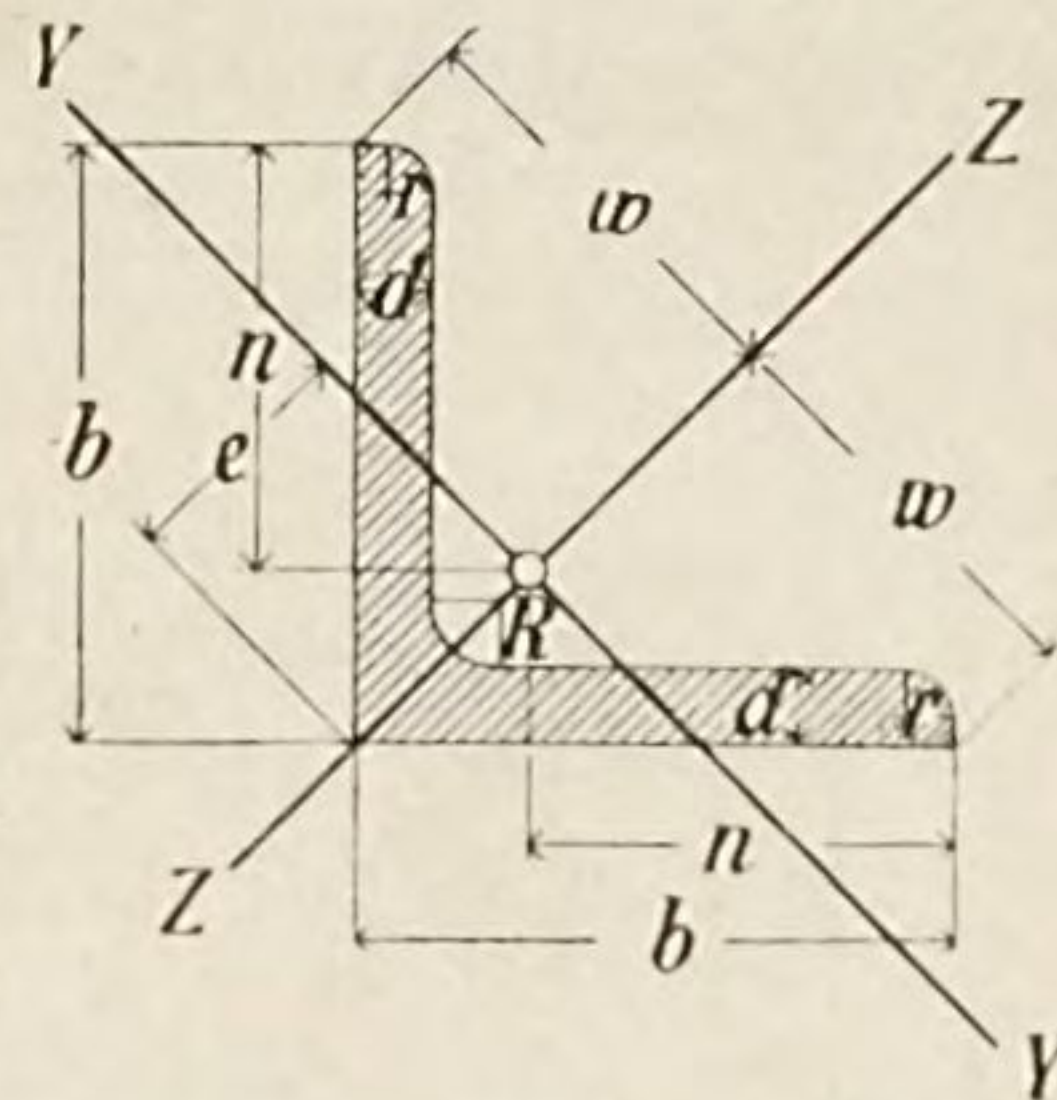
vereinbart 1879 vom Verbands deutscher Architekten- und Ingenieur-Vereine, dem Vereine deutscher Ingenieure und dem Techn. Verein für Eisenhüttenwesen. Vgl. „Deutsches Normalprofilbuch für Walzeisen“, im Auftrage der von den beiden erstgenannten Vereinen niedergesetzten Commission bearbeitet von Dr. F. Heinzerling und O. Jntze, Aachen 1881

Normalprofile für gleichschenklige Winkelleisen.

$$d_{\min.} = 0,1 \, b \text{ für } b \leq 100 \, \text{mm}$$

$$d_{\min.} = \frac{1}{11} \, b \text{ für } b > 100 \, \text{mm}$$

$$R = \frac{d_{\min.} + d_{\max.}}{2}; \quad r = \frac{R}{2}$$



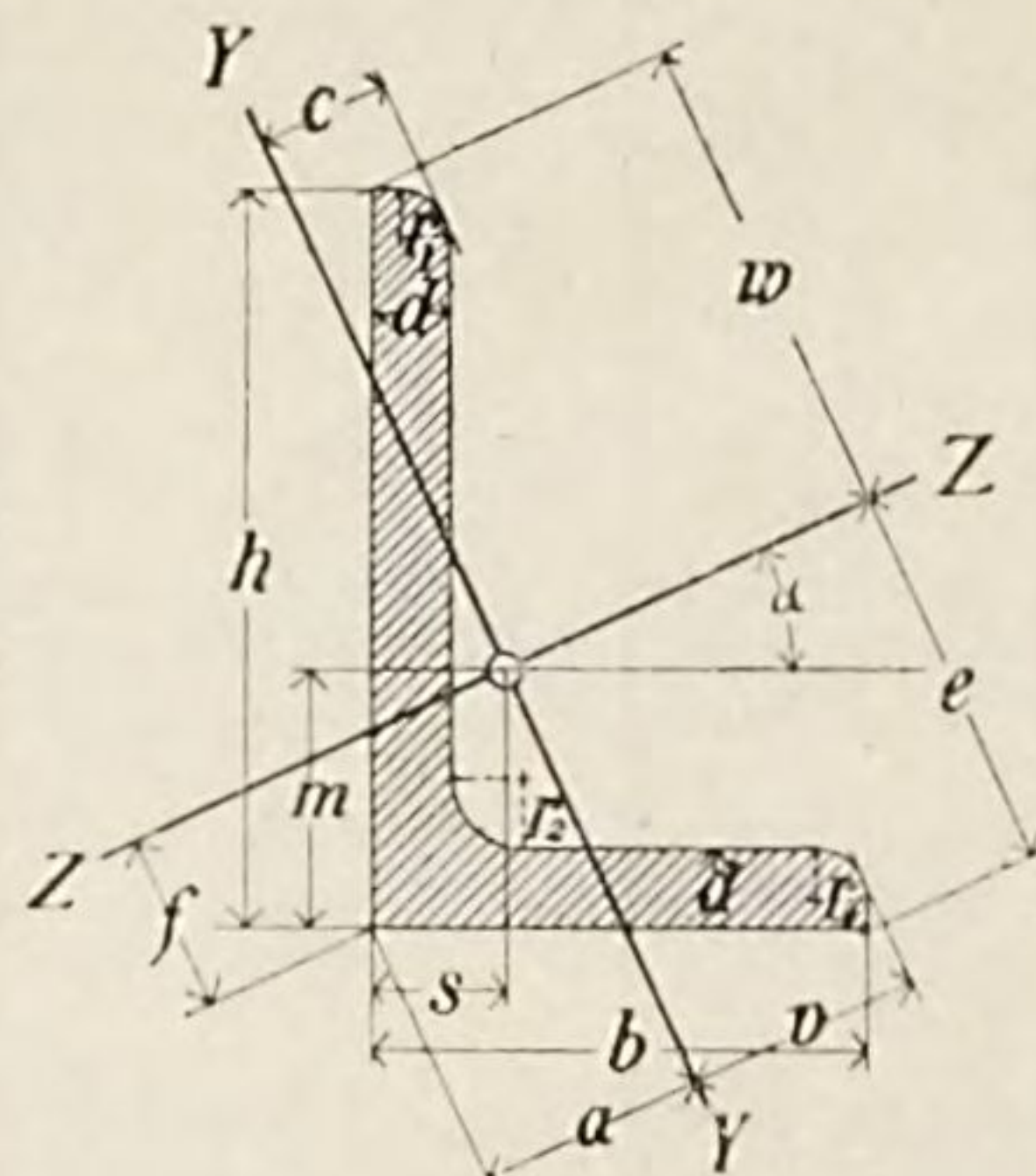
Die Hauptsachen sind:
 ZZ als Winkelhalbierende.
 $YY \perp ZZ$.

Profil- Nr.	Dimensionen in Millimetern				Quer- schn. F	Ge- wicht per 1 Me- ter. p	Abstände von den Hauptachsen und Schwerpunktslage			Momente (in cm) bezüglich der Z-Achse		Momente (in cm) bezüglich der Y-Achse	
	b	d	R	r			w	e	n	Träg- heits- Moment Θ_z	Wider- stands- Moment $\frac{\Theta_z}{w}$	Träg- heits- Moment Θ_y	Wider- stands- Moment $\frac{\Theta_y}{e}$
$1\frac{1}{2}$	15	3 4	3,5	2	0,81 1,04	0,63 0,81	1,05 1,06	0,69 0,74	1,02 0,98	0,252 0,309	0,238 0,291	0,066 0,081	0,096 0,109
2	20	3 4	3,5	2	1,11 1,44	0,87 1,12	1,41 1,41	0,87 0,92	1,39 1,35	0,640 0,792	0,455 0,563	0,169 0,209	0,194 0,226
$2\frac{1}{2}$	25	3 4	3,5	2	1,41 1,84	1,10 1,44	1,77	1,04 1,09	1,76 1,73	1,30 1,64	0,735 0,926	0,342 0,432	0,329 0,397
3	30	4 6	5	2,5	2,24 3,24	1,75 2,53	2,12	1,27 1,30	2,10 2,02	2,93 4,01	1,38 1,89	0,77 1,05	0,608 0,755
$3\frac{1}{2}$	35	4 6	5	2,5	2,64 3,84	2,06 3,00	2,47	1,44 1,55	2,48 2,40	4,80 6,62	1,94 2,68	1,26 1,74	0,876 1,12
4	40	4 6 8	6,0	3,0	3,04 4,41 5,76	2,37 3,46 4,49	2,83	1,63 1,74 1,84	2,85 2,77 2,70	7,33 10,2 12,7	2,59 3,60 4,48	1,93 2,68 3,34	1,18 1,54 1,82
$4\frac{1}{2}$	45	5 7 9	7	3,5	4,25 5,81 7,29	3,32 4,53 5,69	3,18	1,85 1,96 2,07	3,19 3,11 3,04	12,8 16,9 20,4	4,03 5,31 6,41	3,37 4,45 5,38	1,82 2,27 2,60
5	50	5 7 9	7	3,5	4,75 6,51 8,19	3,7 5,1 6,4	3,54	2,04 2,14 2,25	3,56 3,49 3,41	17,8 23,5 28,6	5,03 6,64 8,08	4,68 6,18 7,53	2,30 2,89 3,35
$5\frac{1}{2}$	55	6 8 10	8	4	6,24 8,16 10,00	4,9 6,4 7,8	3,88	2,26 2,36 2,46	3,91 3,83 3,76	28,2 35,7 42,6	7,26 9,18 11,0	7,43 9,38 11,2	3,29 3,99 4,56
6	60	6 8 10	8	4	6,84 8,96 11,00	5,3 7,0 8,6	4,24	2,43 2,53 2,63	4,28 4,21 4,14	37,0 47,2 56,3	8,72 11,1 13,3	9,74 12,4 14,8	4,02 4,90 5,64
$6\frac{1}{2}$	65	7 9 11	9	4,5	8,61 10,9 13,1	6,7 8,5 10,2	4,59	2,66 2,76 2,86	4,62 4,55 4,48	54,4 67,0 78,5	11,8 14,6 17,1	14,3 17,6 20,7	5,38 6,38 7,24
7	70	7 9 11	9	4,5	9,31 11,8 14,2	7,3 9,2 11,1	4,95	2,85 2,94 3,04	4,99 4,92 4,85	68,5 84,8 99,8	13,9 17,2 20,2	18,0 22,3 26,3	6,32 7,58 8,65
$7\frac{1}{2}$	75	8 10 12	10	5	11,4 14,0 16,6	8,9 10,9 12,9	5,30	3,07 3,16 3,26	5,33 5,26 5,19	95,0 115,0 133,0	18,0 21,7 25,1	25,0 30,3 35,0	8,16 9,60 10,7
8	80	8 10 12	10	5	12,2 15,0 17,8	9,5 11,7 13,9	5,66	3,25 3,35 3,44	5,71 5,63 5,56	117 141 162	20,6 24,9 28,6	30,8 37,1 42,7	9,48 11,1 12,4

Profil- Nr.	Dimensionen in Millimetern				Quer- schn. F qcm	Ge- wicht per 1 Me- ter- p kg	Abstände von den Hauptachsen und Schwerpunktslage			Momente (in cm) bezüglich der Z-Axe		Momente (in cm) bezüglich der Y-Axe	
	b	d	R	r			w	e	n	Träg- heits- Moment Θ_z	Wider- stands- Moment $\frac{\Theta_z}{w}$	Träg- heits- Moment Θ_y	Wider- stands- Moment $\frac{\Theta_y}{e}$
9	90	9 11 13	11	5,5	15,4 18,6 21,7	12,0 14,5 16,9	6,36	3,65 3,75 3,85	6,42 6,35 6,28	187 222 254	29,4 34,9 39,9	49,2 58,4 66,8	13,5 15,6 17,4
10	100	10 12 14	12	6	19,0 22,6 26,0	14,8 17,6 20,3	7,07	4,05 4,15 4,25	7,13 7,06 6,99	285 333 378	40,2 47,1 53,4	75,0 87,7 99,5	18,5 21,2 23,5
11	110	10 12 14	12	6	21,0 25,0 28,9	16,4 19,5 22,5	7,78	4,41 4,51 4,61	7,88 7,81 7,74	385 450 513	49,4 57,7 65,9	101 118 135	22,9 26,2 29,3
12	120	11 13 15	13	6,5	25,2 29,5 33,8	19,7 23,0 26,3	8,48	4,84 4,93 5,02	8,59 8,52 8,45	549 634 715	64,8 74,9 84,4	144 167 188	29,8 33,8 37,5
13	130	12 14 16	14	7	29,8 34,4 39,0	23,2 26,9 30,5	9,19	5,22 5,32 5,42	9,31 9,24 9,17	763 867 970	83,1 94,4 106	201 229 256	38,6 43,0 47,3
14	140	13 15 17	15	7,5	34,7 39,8 44,7	27,1 31,0 34,9	9,90	5,64 5,74 5,84	10,02 9,95 9,88	1025 1160 1290	104 117 130	270 305 339	47,9 53,2 58,0
15	150	14 16 18	16	8	40,0 45,4 50,8	31,2 35,4 39,6	10,6	6,04 6,14 6,24	10,7 10,7 10,6	1360 1525 1685	128 144 159	358 401 443	59,3 65,3 71,1
16	160	15 17 19	17	8,5	45,8 51,5 57,2	35,7 40,2 44,6	11,3	6,45 6,55 6,65	11,5 11,4 11,3	1760 1970 2160	156 174 191	463 518 569	71,8 79,0 85,5

Normalprofile für ungleichschenklige Winkelleisen.

$d_{\min.} = \frac{b + h}{20}$; jedoch
mit geringfügigen Abweichungen.



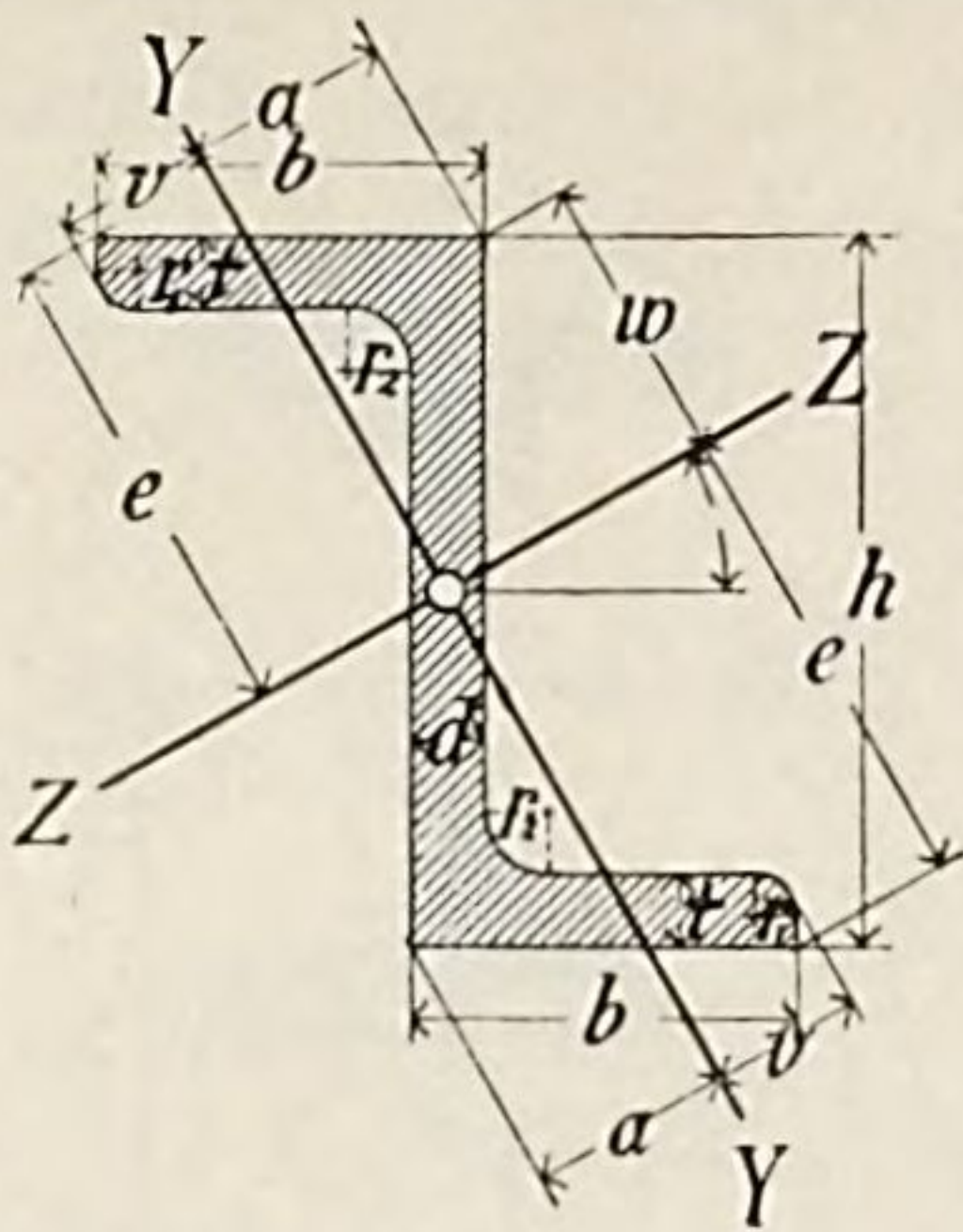
$$r_2 = \frac{d_{\min.} + d_{\max.}}{2};$$

$$r_1 = \frac{r_2}{2}.$$

Profil-Nr.	Dimensionen in Millimetern					Quer- schn. F qcm	Gewicht per 1 Meter q kg	Schwer- punkts- Ab- stände in cm		Lage der Haupt- Axe ZZ $tg\ a$	Abstände von den Hauptachsen in cm						Momente (in cm) bezüg- lich der Z -Axe		Momente (in cm) bezüg- lich der Y -Axe	
	b	h	d	r_1	r_2			m	s		von der ZZ -Axe			von der YY -Axe			Träg- heits- Mo- ment Θ_z	Wi- derst.- Mo- ment $\frac{\Theta_z}{w}$	Träg- heits- mo- ment Θ_y	Wi- derst.- mo- ment $\frac{\Theta_y}{v}$
											w	e	f	v	a	c				
2/3	20	30	3 4	2	3,5	1,41 1,84	1,10 1,44	1,01 1,05	0,51 0,55	0,407 0,382	2,00 2,00	1,51 1,45	0,76 0,79	1,09 1,04	0,86 0,90	0,48 0,45	1,44 1,79	0,718 0,896	0,292 0,392	0,263 0,377
2/4	20	40	3 4	2	3,5	1,71 2,24	1,33 1,75	1,45 1,49	0,45 0,49	0,252 0,231	2,56 2,53	1,86 1,79	1,30 1,34	1,19 1,18	0,80 0,82	0,41 0,42	2,99 3,79	1,17 1,50	0,331 0,445	0,279 0,378
3 4 ¹ / ₂	30	45	4 5	2	4,5	2,84 3,50	2,22 2,73	1,50 1,54	0,75 0,79	0,421 0,400	3,05 3,03	2,30 2,28	1,11 1,15	1,62 1,65	1,30 1,31	0,79 0,78	6,63 7,91	2,18 2,61	1,29 1,64	0,795 0,990
3/6	30	60	5 7	3	6	4,25 5,81	3,32 4,53	2,20 2,27	0,69 0,77	0,242 0,215	3,88 3,85	2,68 2,70	1,96 2,06	1,77 1,78	1,19 1,25	0,63 0,65	16,5 21,7	4,25 5,63	1,89 2,66	1,08 1,50
4/6	40	60	5 7	3	6	4,75 6,51	3,71 5,08	1,99 2,06	0,99 1,06	0,426 0,400	4,11 4,06	3,01 3,00	1,44 1,52	2,02 2,10	1,72 1,72	1,03 1,04	19,9 26,0	4,85 6,40	3,79 5,39	1,88 2,56
4/8	40	80	6 8	3,5	7	6,84 8,96	5,34 7,00	2,90 2,97	0,90 0,97	2,249 0,229	5,17 5,15	3,55 3,59	2,60 2,66	2,40 2,37	1,55 1,60	0,87 0,94	47,7 60,6	9,22 11,8	5,36 7,16	2,23 3,02
5 7 ¹ / ₂	50	75	7 9	4	8	8,26 10,44	6,4 8,1	2,51 2,58	1,26 1,33	0,417 0,398	5,10 5,10	3,75 3,73	1,83 1,88	2,64 2,60	2,10 2,19	1,26 1,27	53,2 64,9	10,4 12,7	10,5 13,6	3,97 5,21
5/10	50	100	8 10	4,5	9	11,36 14,00	8,9 10,9	3,64 3,71	1,14 1,21	0,246 0,231	6,45 6,39	4,43 4,45	3,23 3,32	2,94 2,96	1,96 2,04	1,07 1,14	123 148	19,1 23,2	13,9 17,4	4,73 5,88
6 ¹ / ₂ 10	65	100	9 11	5	10	14,04 16,94	11,0 13,2	3,37 3,44	1,62 1,69	0,399 0,384	6,77 6,72	4,90 4,98	2,51 2,60	3,54 3,51	2,76 2,79	1,62 1,73	160 188	23,7 28,0	30,1 36,9	8,50 10,50
6 ¹ / ₂ 13	65	130	10 12	5,5	11	18,50 21,96	14,4 17,1	4,72 4,79	1,47 1,54	0,241 0,236	8,40 8,38	5,78 5,80	4,21 4,30	3,88 3,84	2,59 2,61	1,42 1,42	340 396	40,5 47,2	38,0 45,9	9,79 12,0
8/12	80	120	10 12	5,5	11	19,0 22,56	14,8 17,6	3,97 4,05	1,97 2,05	0,425 0,412	8,18 8,10	6,00 6,04	2,90 3,00	4,20 4,20	3,36 3,46	2,11 2,08	318 368	38,8 45,5	61,1 73,8	14,6 17,6
8/16	80	160	12 14	6,5	13	27,36 31,64	21,3 24,7	5,79 5,87	1,79 1,87	0,249 0,240	10,35 10,30	7,10 7,10	5,20 5,27	4,80 4,78	3,16 3,20	1,75 1,78	764 870	73,9 84,6	85,9 99,6	17,9 20,8
10/15	100	150	12 14	6,5	13	28,56 33,04	22,3 25,8	4,95 5,02	2,45 2,52	0,426 0,418	10,18 10,18	7,51 7,52	3,62 3,62	5,26 5,32	4,20 4,28	2,62 2,58	749 851	73,7 83,9	143,6 167,4	27,2 31,5
10/20	100	200	14 16	7,5	15	40,04 45,44	31,2 35,4	7,20 7,27	2,20 2,28	0,252 0,246	12,97 12,85	8,89 8,92	6,44 6,54	6,00 5,94	3,90 3,96	2,23 2,20	1757 1970	135,5 152,5	196 223	32,7 37,5

Normalprofile für Z-Eisen.

$b = 0,25 \ h + 30 \ mm$
 $d = 0,035 \ h + 3 \ mm$; jedoch auf halbe Millim. abgerundet.
 $t = 0,05 \ h + 3 \ mm$
 $r_2 = t; r_1 = \frac{t}{2}.$



α = Winkel von ZZ mit den Flantschen, bzw. von YY mit der Verticalrippe.

Profil-Nr.	Dimensionen in Millimetern						Quer- schn. <i>F</i> <i>qcm</i>	Ge- wicht per 1 Me- ter <i>q</i> <i>kg</i>	Lage der Haupt- Achsen <i>tg α =</i>	Abstände von den Haupt- Achsen (in <i>cm</i>)				Momente (in <i>cm</i>) bezüglich der Z-Axe		Momente (in <i>cm</i>) bezüglich der Y-Axe	
										v. d. Z-Achse		v. d. Y-Achse		Träg- heits- Moment <i>Θ_z</i>	Wider- stands- Moment $\frac{\Theta_z}{e}$	Träg- heits- Moment <i>Θ_y</i>	Wider- stands- Moment $\frac{\Theta_y}{a}$
	<i>e</i>	<i>w</i>	<i>a</i>	<i>v</i>													
	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>t</i>	<i>r₁</i>	<i>r₂</i>				<i>e</i>	<i>w</i>	<i>a</i>	<i>v</i>	<i>Θ_z</i>	$\frac{\Theta_z}{e}$	<i>Θ_y</i>	$\frac{\Theta_y}{a}$
3	30	38	4	4,5	2,5	4,5	4,26	3,3	1,69	3,86	0,56	1,41	0,84	18,3	4,75	1,61	1,14
4	40	40	4,5	5	2,5	5	5,35	4,2	1,20	4,19	1,10	1,68	1,16	28,3	6,76	3,00	1,79
5	50	43	5	5,5	3	5,5	6,68	5,2	0,96	4,62	1,60	1,92	1,45	45,2	9,80	5,17	2,69
6	60	45	5	6	3	6	7,80	6,1	0,80	5,00	2,19	2,10	1,69	67,9	13,6	7,07	3,34
8	80	50	6	7	3,5	7	10,96	8,6	0,61	5,86	3,26	2,34	2,15	142,9	24,4	13,6	5,82
10	100	55	6,5	8	4	8	14,26	11,1	0,52	6,84	4,30	2,60	2,53	272	39,7	21,1	8,14
12	120	60	7	9	4,5	9	17,94	14,0	0,46	7,88	5,32	2,81	2,81	474	60,1	30,0	10,7
14	140	65	8	10	5	10	22,60	17,6	0,42	8,79	6,33	3,03	3,15	773	88,0	44,6	14,2
16	160	70	8,5	11	5,5	11	27,13	21,2	0,39	9,85	7,32	3,29	3,48	1193	120,5	58,8	16,9

Normalprofile für I-Eisen.

Bis $h = 250 \text{ mm}$ ist $b = 0,4 \cdot h$

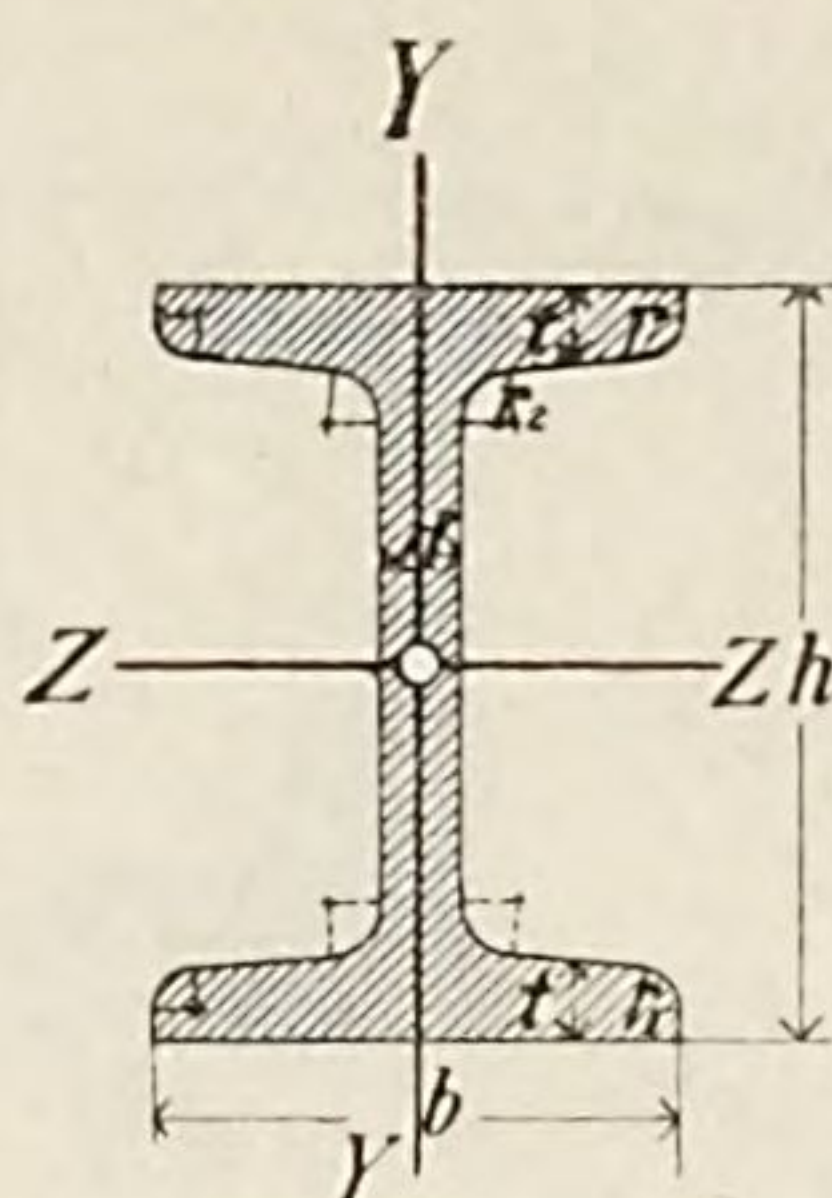
+ 10 mm ;

$d = 0,03 \cdot h + 1,5 \text{ mm}$.

Für $h > 250 \text{ mm}$ ist $b = 0,3 \cdot h$

+ 35 mm

$d = 0,036 \cdot h$.



Neigung der inneren Flantschen-
flächen 14 ‰.

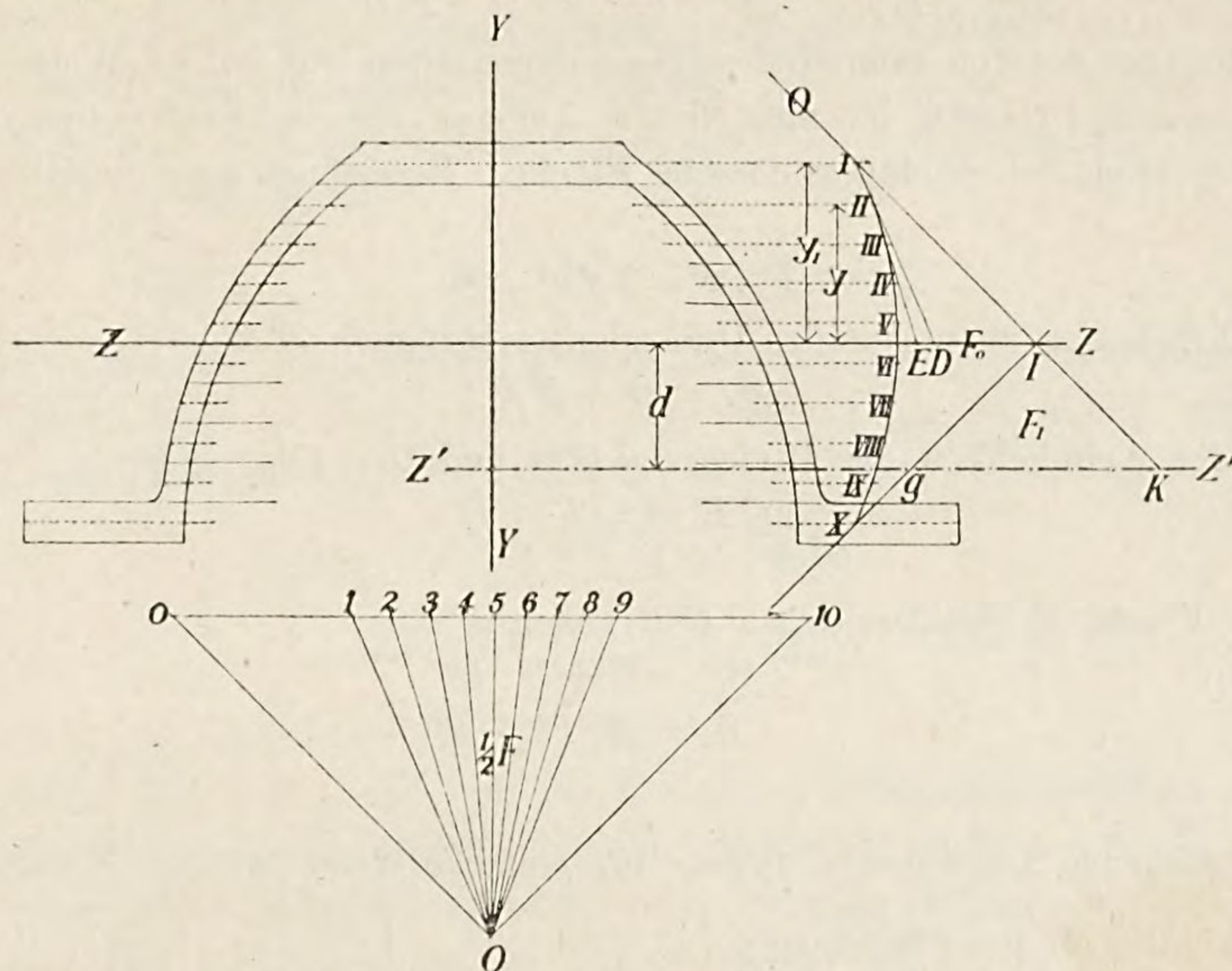
$r_2 = d$; $r_1 = 0,6 \cdot d$.

Profil- Nr.	Dimensionen in Millimetern.						Quer- schn. F' qcm	Ge- wicht per 1 Me- ter p kg	Momente (in cm) bezüglich der Z -Axe		Momente (in cm) bezüglich der Y -Axe	
	h	b	d	t	r_1	r_2			Träg- heits- Moment Θ_z	Wider- stands- Moment $\frac{\Theta_z}{\frac{1}{2}h}$	Träg- heits- Moment Θ_y	Wider- stands- Moment $\frac{\Theta_y}{\frac{1}{2}b}$
8	80	42	3,9	5,9	2,3	3,9	7,61	6,0	78,4	19,6	7,35	3,5
9	90	46	4,2	6,3	2,5	4,2	9,05	7,1	118	26,2	10,4	4,5
10	100	50	4,5	6,8	2,7	4,5	10,69	8,3	172	34,4	14,3	5,7
11	110	54	4,8	7,2	2,9	4,8	12,36	9,6	241	43,8	18,9	7,0
12	120	58	5,1	7,7	3,1	5,1	14,27	11,1	331	55,1	25,2	8,7
13	130	62	5,4	8,1	3,2	5,4	16,19	12,6	441	67,8	32,2	10,4
14	140	66	5,7	8,6	3,4	5,7	18,35	14,3	579	82,7	41,3	12,5
15	150	70	6,0	9,0	3,6	6,0	20,5	16,0	743	99,0	51,8	14,8
16	160	74	6,3	9,5	3,8	6,3	22,9	17,9	945	118	64,4	17,4
17	170	78	6,6	9,9	4,0	6,6	25,4	19,8	1177	139	78,8	20,2
18	180	82	6,9	10,4	4,1	6,9	28,0	21,9	1460	162	95,9	23,4
19	190	86	7,2	10,8	4,3	7,2	30,7	24,0	1779	187	115,2	26,8
20	200	90	7,5	11,3	4,5	7,5	33,7	26,2	2162	216	138	30,7
21	210	94	7,8	11,7	4,7	7,8	36,6	28,5	2587	246	163	34,6
22	220	98	8,1	12,2	4,9	8,1	39,8	31,0	3090	281	192	39,2
23	230	102	8,4	12,6	5,0	8,4	42,9	33,5	3642	317	224	43,9
24	240	106	8,7	13,1	5,2	8,7	46,4	36,2	4288	357	261	49,3
26	260	113	9,4	14,1	5,6	9,4	53,7	41,9	5798	446	341	60,3
28	280	119	10,1	15,2	6,1	10,1	61,4	47,9	7658	547	429	72,1
30	300	125	10,8	16,2	6,5	10,8	69,4	54,1	9888	659	530	84,8
32	320	131	11,5	17,3	6,9	11,5	78,2	61,0	12622	789	652	99,5
34	340	137	12,2	18,3	7,3	12,2	87,2	68,0	15827	931	789	115
36	360	143	13,0	19,5	7,8	13,0	97,5	76,1	19766	1098	956	134
38	380	149	13,7	20,5	8,2	13,7	107,5	83,9	24208	1274	1138	153
40	400	155	14,4	21,6	8,6	14,4	118,3	92,3	29446	1472	1349	174
42 $\frac{1}{2}$	425	163	15,3	23,0	9,2	15,3	133,0	103,7	37266	1754	1672	205
45	450	170	16,2	24,3	9,7	16,2	147,7	115,2	46204	2054	2004	236
47 $\frac{1}{2}$	475	178	17,1	25,6	10,3	17,1	163,6	127,6	56912	2396	2424	272
50	500	185	18,0	27,0	10,8	18,0	180,2	140,5	69245	2770	2871	310

Graphische Bestimmung der Trägheitsmomente.*)

Man zerlegt die Querschnittsfläche parallel der Axe $Z'Z'$, bezüglich deren das Trägheitsmoment gefunden werden soll (Fig. 2), in eine hinreichende Anzahl von

Fig. 2.



Lamellen, bestimmt die Flächen derselben, welche als Längen $O1, 12 \dots 9 10$ auf einer zu $Z'Z'$ parallelen Geraden aufgetragen werden und denkt diese Flächen als zur Axe parallele Kräfte in den Schwerpunkten der betreffenden Lamellen angebracht.

Wird nun mit der Poldistanz $\frac{1}{2} F = \frac{O-10}{2}$ (wenn F die Gesamtfläche des Querschnitts) Kräfte- und Seilpolygon construiert, so gibt der Schnitt J der äussersten Seilpolygonseiten einen Punkt der zu $Z'Z'$ parallelen Schwerpunktsaxe ZZ und die von diesen Seilpolygonseiten sammt dem Seilpolygon selbst gebildete Fläche F_0 liefert, mit F multiplicirt, das Trägheitsmoment des Querschnitts bezüglich der Schwerpunktsaxe.

Denkt man sich nämlich je zwei aufeinanderfolgende Seilpolygonseiten z. B. $O I$ und $I II$ bis zur Schwerpunktsaxe ZZ verlängert, so sind die hiedurch entstehenden Dreiecke $I J D, II D E$ u. s. f. ähnlich den entsprechenden Dreiecken $O_0 1, O_1 2$ u. s. f. im Kräftepolygon, daher

$$\begin{aligned} J D : J I &= O 1 : O_0, \\ D E : D II &= 12 : O_1 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

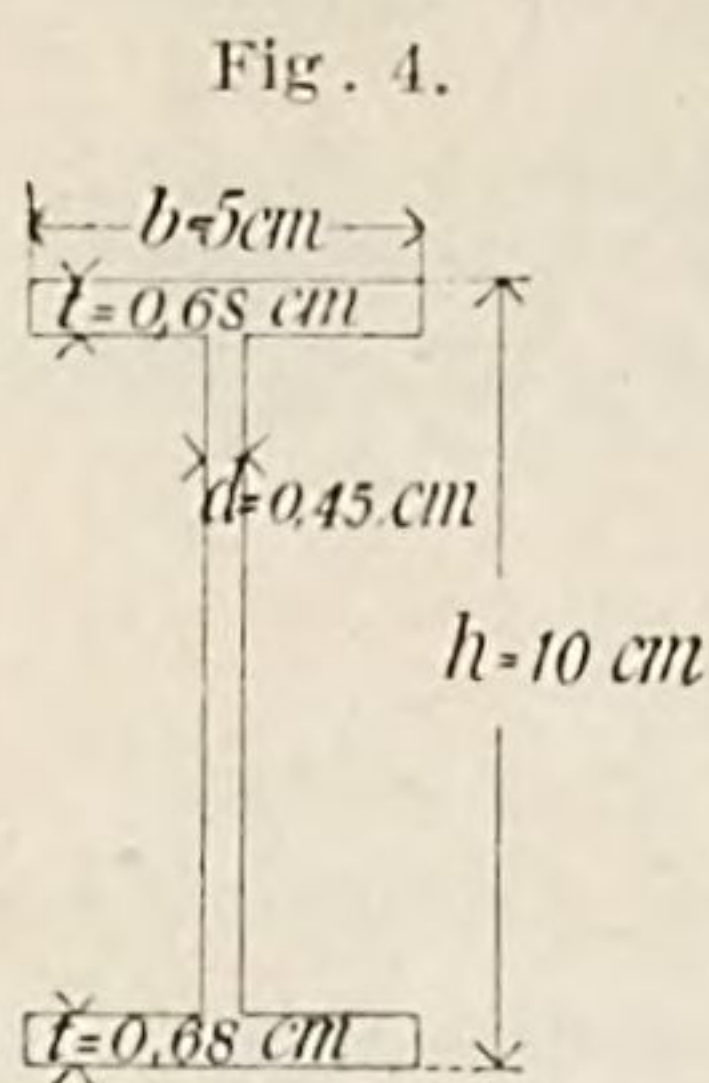
oder, wenn mit $f_1, f_2 \dots$ die Flächen der einzelnen Lamellen und mit $y_1, y_2 \dots$ die Abstände ihrer Schwerlinien von ZZ bezeichnet werden

$$\begin{aligned} J D : y_1 &= f_1 : \frac{1}{2} F, \\ D E : y_2 &= f_2 : \frac{1}{2} F \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

daher

$$\frac{1}{2} J D y_1 = \frac{f_1 y_1^2}{F}$$

*) Mohr, Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisen-Constructions, Zeitsch. des Arch.- und Ing.-Vereins zu Hannover 1870.



Beispiel 1. Welche grösste gleichmässig vertheilte ruhende Last pro Längeneinheit kann ein gewalzter Träger des nebenstehenden Querschnitts aufnehmen, wenn derselbe auf 2 m Länge frei aufliegt?

Unter Voraussetzung ruhender Belastung kann $\alpha = 750 \text{ kg}$ pro $q \text{ cm}$ angenommen werden.

Da $m = 5$ und $\Theta = \frac{1}{12} [b h^3 - (b - d) (h - 2 t)^3] = 172$, (Vgl. Tab. S. 20)

so ist
$$\frac{\alpha}{m} \Theta = 25800 \text{ cmkg.}$$

Das Eigengewicht des Trägers beträgt (bei 10,69 $q \text{ cm}$ Querschnittsfläche und dem specifischen Gewicht des Eisens von 7,8) 0,083 kg per cm , daher, wenn q die aufzunehmende Last per cm , nach Th. II S. 16 Gl. 25

$$\mathfrak{M}_{\max} = (0,083 + q) \frac{200^2}{8}$$

$$\text{und } (0,083 + q) \frac{200^2}{8} = 25800,$$

daher $q = 5,077 \text{ kg}$ per cm oder 507,7 kg per m .

Beispiel 2. Ein 4 m langer, mit den Enden frei aufliegender gewalzter **I** Träger hat ausser dem Eigengewicht eine gleichmässig vertheilte fixe Last $p = 150 \text{ kg}$ per m und eine zeitweise wirkende Last $q = 400 \text{ kg}$ per m aufzunehmen. Welches von den Profilen der Tabelle S. 20 ist für den Träger zu wählen?

Man hat
$$\mathfrak{M}_p = \frac{1,5 \cdot 400^2}{8} = 30000 \text{ cmkg}$$

und
$$\mathfrak{M}_q = \frac{4,0 \cdot 400^2}{8} = 80000 \text{ cmkg.}$$

Nach Gl. (14) ist nun
$$\varphi = \frac{\mathfrak{M}_p}{1,5 \mathfrak{M}_q} = 0,25,$$

ferner nach der Tabelle S. 9 $\sigma = 1,81$ und $\tau = \sigma - \varphi = 1,56$, daher $\mathfrak{M}_p + 1,5 \tau \mathfrak{M}_q = 217200 \text{ cmkg.}$

Indem man nun analog der Gleichung (9)

$$\mathfrak{M}_p + 1,5 \tau \mathfrak{M}_q = \frac{\alpha}{m} \Theta \text{ setzt,}$$

wobei für α (S. Seite 9) die der Elasticitätsgrenze entsprechende Spannung eingeführt wird, ergibt sich das erforderliche Profil aus

$$217200 = 1600 \frac{\Theta}{m}$$

oder
$$\frac{\Theta}{m} = 135,75.$$

Diesem Werthe kommt am nächsten das Profil 17 der Tabelle S. 20 mit $\frac{\Theta}{m} = 139$ und dem Eigengewicht von 19,8 kg per m . Bei Anwendung dieses Profils vermehrt sich obiger Momentenwerth um das Moment des Eigengewichts (= 3960), so dass die auf ruhende Belastung umgesetzte Spannung erhalten wird:

$$\alpha = \frac{\mathfrak{M}_p + \tau 1,5 \mathfrak{M}_q}{\frac{\Theta}{m}} = \frac{221160}{139} = 1591 \text{ kg per } q \text{ cm.}$$

Für Gusseisen ist die zulässige Beanspruchung auf Zug nach der Tabelle S. 1 gleich dem vierten Theile derjenigen auf Druck, also $\beta = 4 \alpha$, daher nach Gl. (10) und (11) Theil II, wenn m die Entfernung der äussersten gezogenen, n die Entfernung der äussersten gedrückten Faser vom Schwerpunkt bezeichnet,

$$\frac{\beta}{4m} \Theta = \frac{\beta}{n} \Theta$$

oder

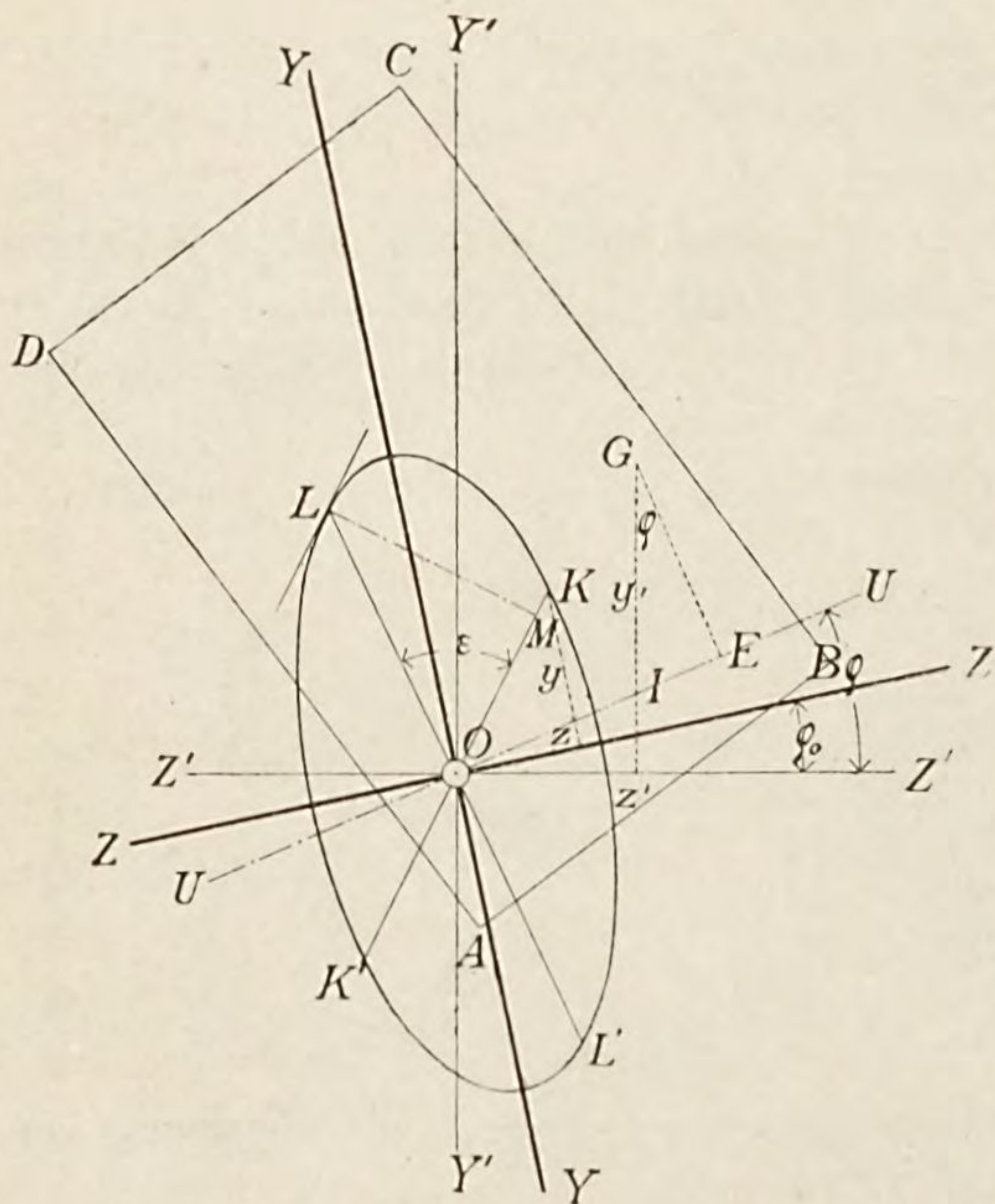
$$n = 4m.$$

Man hat demnach die Querschnitte von gusseisernen Trägern so anzuordnen, dass der Schwerpunkt in einem Abstand von der äussersten gezogenen Faser sich befindet, welcher gleich dem fünften Theile der Gesamthöhe des Querschnitts ist.

Änderung des Trägheitsmomentes bei paralleler Verschiebung und bei Drehung der Axe. Hauptaxen. Maximal- und Minimal-Trägheitsmoment.

Ist Θ_s das Trägheitsmoment eines Querschnitts von der Fläche F bezüglich

Fig. 5.



einer durch den Schwerpunkt gehenden Axe, so erhält man das Trägheitsmoment Θ für eine andere, zu ersterer parallele und um d von derselben entfernte Axe aus der Gleichung:

$$\Theta = \Theta_s + F d^2.$$

Das Trägheitsmoment eines Querschnitts ändert sich ferner mit jeder Drehung der Axe, auf welche dasselbe bezogen ist. Zur näheren Untersuchung dieses Zusammenhangs dient Folgendes:

Sind Θ_z' und Θ_y' die Trägheitsmomente des Querschnitts $ABCD$ bezüglich der durch O gehenden, zu einander senkrechten Axen OZ' und OY' (Fig. 5) so findet man, weil

$$GE = GJ \cos \varphi = (y' - z' \tan \varphi) \cos \varphi = y' \cos \varphi - z' \sin \varphi, \text{ das Trägheitsmoment des Querschnitts für eine andere, durch } O \text{ gehende, mit } OZ' \text{ den Winkel } \varphi \text{ einschliessende Axe } OU \text{ aus der Gleichung;}$$

$$\begin{aligned} \Theta_u &= \int (y' \cos \varphi - z' \sin \varphi)^2 dF \\ &= \int y'^2 dF \cos^2 \varphi + \int z'^2 dF \sin^2 \varphi - \int 2 z' y' dF \sin \varphi \cos \varphi \\ &= \Theta_z' \cos^2 \varphi + \Theta_y' \sin^2 \varphi - \sin 2 \varphi \int z' y' dF^*) \quad . \quad . \quad . \quad (24) \end{aligned}$$

*) Gl. 24 kann zur Bestimmung von $\int z' y' dF$ verwendet werden wenn man das Trägheitsmoment Θ_u' für eine weitere Axe $U'U'$ kennt, welche den rechten Winkel $Y'OZ'$ halbt. In diesem Falle hat man nämlich:

$$\begin{aligned} \Theta_u' &= \Theta_z' \cos^2 45 + \Theta_y' \sin^2 45 - \sin 90^\circ \int z' y' dF, \\ \text{oder: } \int z' y' dF &= \frac{1}{2} (\Theta_z' + \Theta_y') - \Theta_u' \quad . \quad . \quad . \quad (25) \end{aligned}$$

Zum Maximum oder Minimum wird Θ_u für diejenige Neigung φ_0 der Axe $O U$ gegen $O Z'$, welche die Bedingung $\frac{d\Theta_u}{d\varphi} = (\Theta_{y'} - \Theta_{z'}) \sin 2\varphi - 2 \cos \varphi \int z' y' dF = 0$ erfüllt, nämlich für:

$$\tan 2 \varphi_0 = \frac{2 \int z' y' d F}{\Theta_{y'} - \Theta_{z'}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Diesem Ausdrucke entsprechen zwei, um 90° von einander verschiedene Werthe von φ_0 . Die nochmalige Differentiation ergibt:

$$\frac{d^2 \Theta_n}{d \varphi_0^2} = 2 (\Theta_{y'} - \Theta_{z'}) \cos 2 \varphi_0 + 4 \sin 2 \varphi_0 \int z' y' dF.$$

Setzt man $90^\circ + \varphi_0$ für φ_0 , so erhält man:

$$\frac{d^2 \Theta_u}{d \varphi_0^2} = -2 (\Theta_{y'} - \Theta_{z'}) \cos 2 \varphi_0 - 4 \sin 2 \varphi_0 \int z' y' dF.$$

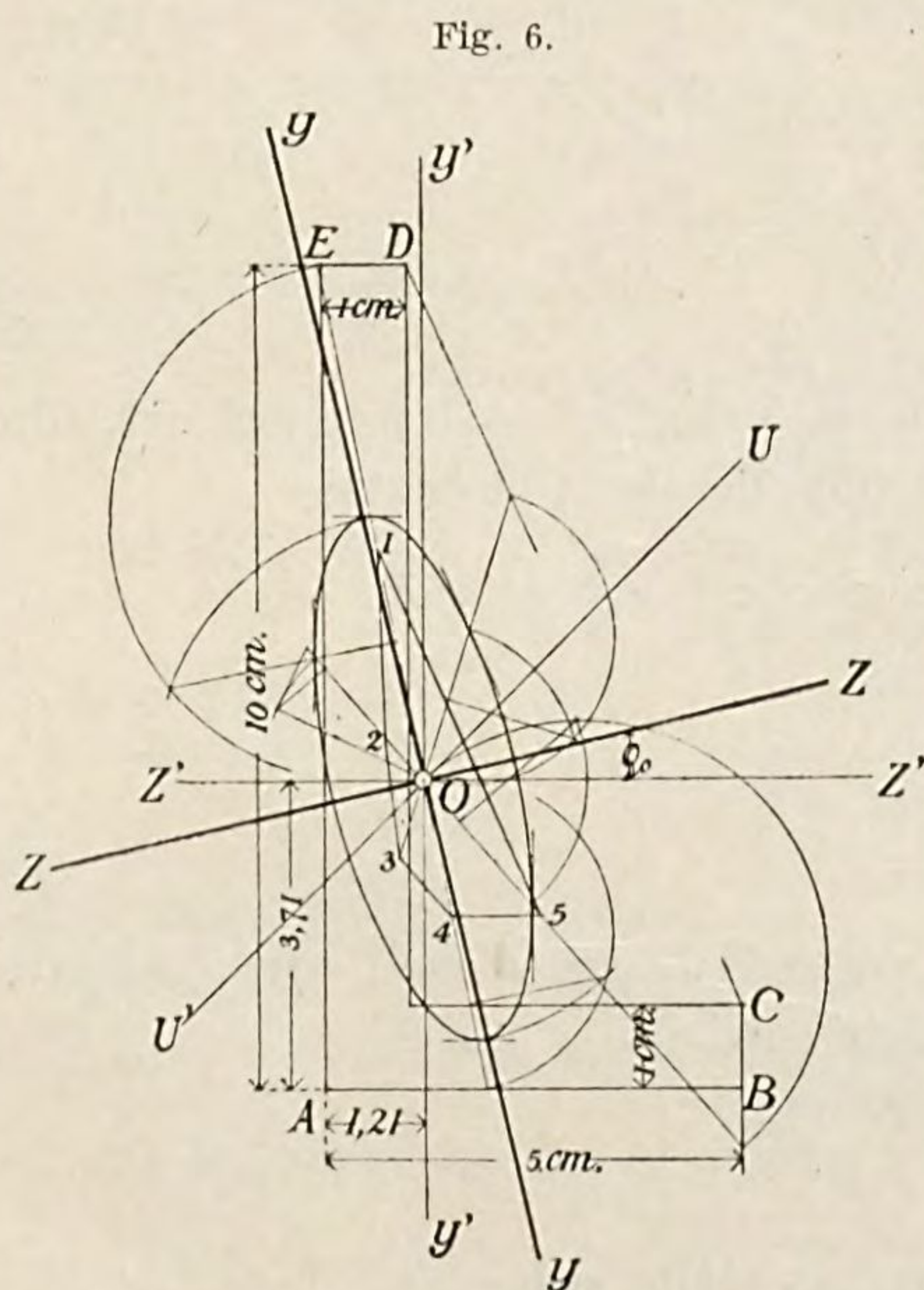
Da die zweiten Differentialquotienten, welche den beiden Werthen des Winkels φ_0 entsprechen, entgegengesetztes Vorzeichen haben, so zeigt der eine derselben ein Maximum, der andere ein Minimum von Θ_u an.

Es geht daraus hervor, dass sich durch den Punkt O zwei zu einander senkrechte Axen legen lassen, für welche das Trägheitsmoment des Querschnitts ein Maximum und ein Minimum wird. Diese in Fig. 5 stark gezeichneten Axen OZ und OY heissen Hauptaxen und zwar bezeichnet man als erste Hauptaxe diejenige, welcher $\Theta_{\max}$ (Θ') entspricht, als zweite Hauptaxe aber jene, welcher $\Theta_{\min}$ (Θ'') zugehörig ist.

Das oben beliebig angenommene Axenkreuz $Y' O Z'$ fällt mit den Hauptaxen $Y O Z$ zusammen, wenn $\varphi_0 = 0$ oder, nach Gl. 26, wenn

$$\int z y d F=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Es folgt daraus, dass wenn durch O eine Symmetrieaxe der Querschnitts-



fläche gelegt werden kann, diese zugleich eine Hauptaxe des Querschnitts ist, während die hiezum Normale die andere Hauptaxe vorstellt, denn für beide gilt $\int z y dF = 0$.

Werden statt obiger Coordinaten-
axen OZ' und OY' die Hauptaxen
zum Ausgangspunkt genommen, so er-
hält man einfacher das Trägheits-
moment Θ für eine durch O gehende
andere Axe aus der Gleichung:

$$\Theta = \Theta' \cos^2 \varphi + \Theta'' \sin^2 \varphi \quad . \quad (28)$$

Beispiel. Für das Profil Fig. 6 ist die Lage der Hauptaxen zu bestimmen.

Man berechnet für die zu den Schenkeln des Winkeleisens parallelen Schwerpunktsachsen $Z'Z'$ und $Y'Y'$ die Trägheitsmomente $\Theta_{z'} = 141,53$ und $\Theta_{y'} = 24,03$, ferner das Trägheitsmoment

bezüglich der um 45° gegen $Z' Z'$ geneigten Axe $U U$: $\Theta_u = 111,48$.

Hieraus ergibt sich nach Gl. (25)

$$\int z' y' dF = \frac{1}{2} (141,53 + 24,03) - 111,48 = -28,7$$

und nach Gl. (26)

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2(-28,7)}{24,03 - 141,51} = \frac{57,4}{117,5}$$

oder

$$\varphi_0 = 13^\circ 1'.$$

Die Hauptträgheitsmomente des Profils berechnen sich hienach:

$$\text{für } ZZ \quad \Theta' = 148 \quad \text{und für } YY \quad \Theta'' = 17,4.$$

Trägheitsellipse. Centralellipse.

Zur Vereinfachung der Rechnung wird häufig der Begriff des Trägheitsradius' eingeführt. Bestimmt man nämlich für einen Querschnitt von der Fläche F und dem einer gegebenen Axe zugehörigen Trägheitsmoment $\int y^2 dF$ eine Grösse r so, dass $\int y^2 dF = r^2 \int dF = r^2 F$, so wird r der Trägheitsradius der Fläche bezüglich der gegebenen Axe genannt.

Denkt man sich jetzt die Trägheitsmomente des Querschnitts $ABCD$ Fig. 5 für beliebig viele, durch O gehende Axen bestimmt und auf den betreffenden Axen von O aus derartige Längen aufgetragen, welche den auf sie bezogenen Trägheitsmomenten umgekehrt proportional sind, so dass beispielsweise $OK = \frac{k}{\sqrt{\Theta}}$, wenn Θ das Trägheitsmoment von $ABCD$ für $K'K$ und k eine beliebige Constante, so ist nach Gl. (28) der auf die Hauptaxen YOZ bezogene geometrische Ort aller Punkte K , weil

$$\cos \varphi = \frac{z}{OK} \quad \text{und} \quad \sin \varphi = \frac{y}{OK}, \quad \text{gegeben durch:}$$

$$\Theta' \frac{z^2}{OK^2} + \Theta'' \frac{y^2}{OK^2} = \Theta,$$

oder

$$\Theta' z^2 + \Theta'' y^2 = k^2. \quad \dots \dots \dots (29)$$

Die dieser Gleichung entsprechende Ellipse, Trägheitsellipse genannt, wird auf ihre einfachste Form gebracht durch Einführung der Constanten

$$k = \sqrt{\frac{\Theta' \Theta''}{F}}. \quad \text{Setzt man gleichzeitig } \Theta' = a^2 F$$

und $\Theta'' = b^2 F$, so ergibt sich

$$a^2 z^2 + b^2 y^2 = a^2 b^2$$

oder

$$\frac{z^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \dots \dots \dots (30)$$

als Gleichung derjenigen Trägheitsellipse, deren Halbaxen a und b die Trägheitsradien der Haupt-Trägheitsmomente Θ' und Θ'' sind.

Da bei

$$k = \sqrt{\frac{\Theta' \Theta''}{F}}$$

auch

$$OK = \sqrt{\frac{\Theta \Theta'}{F \Theta}} \quad \text{ist, so ergibt sich}$$

$$\Theta = \frac{F a^2 b^2}{O K^2},$$

oder, wenn $\Theta = F r^2$ gesetzt wird:

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{O K^2}$$

d. i.

$$r = \frac{a b}{O K}.$$

Sind nun $K K'$ und $L L'$ (Fig. 5) conjugirte Durchmesser der Centralellipse, sind ferner d und d' ihre halben Längen und ε der von denselben eingeschlossene Winkel, so ist bekanntlich

$$a \cdot b = d \cdot d' \sin \varepsilon,$$

daher

$$r = \frac{d \cdot d' \sin \varepsilon}{O K} = d' \sin \varepsilon = L M,$$

wenn LM die Länge der vom Endpunkt L des einen Durchmessers zum anderen gezogenen Senkrechten.

Der Trägheitsradius des auf die Axe $K K'$ bezogenen Trägheitsmomentes ist also gleich dem Abstand dieser Axe von einer zu ihr parallelen Tangente an der Trägheitsellipse. Letztere kann desswegen auch dadurch entstanden gedacht werden, dass je zu beiden Seiten einer gegebenen Axe und im jeweiligen Abstand r von derselben parallele Gerade zu dieser Axe gezogen werden. Indem man die Axe um den Punkt O dreht, umhüllen jene Geraden die Trägheitsellipse.

In der Trägheitsellipse, welche bei bekannten Hauptaxen und Hauptträgheitsmomenten durch ihre Halbaxen a und b bestimmt ist, erkennt man, da F bekannt und r aus der Zeichnung zu entnehmen, ein einfaches Mittel zur Bestimmung der Trägheitsmomente beliebiger, durch O gehender Axen. Fällt der Punkt O mit dem Schwerpunkt des Querschnitts zusammen, so wird die Trägheitsellipse Centralellipse genannt.

Beispiel 1. Zur Bestimmung der Centralellipse des **I** Profils Fig. 14 berechnet man für die Hauptaxen dieses Profils, welche mit dessen Symmetriemaxen zusammenfallen, die Trägheitsmomente:

$$\Theta' = \frac{1}{12} (12,5 \cdot 30,0^3 - 11,42 \cdot 26,76^3) = 9888,43$$

$$\text{und } \Theta'' = \frac{1}{12} (3,24 \cdot 12,5^3 + 26,76 \cdot 1,08^3) = 530,15 \text{ (in cm)}.$$

Da $F = 69,4$, so ergeben sich die Halbaxen der Centralellipse

$$a = \sqrt{\frac{9888,43}{69,4}} = 11,93 \text{ cm}$$

$$\text{und } b = \sqrt{\frac{530,15}{69,4}} = 2,76 \text{ cm},$$

welche somit gezeichnet werden kann.

Beispiel 2. Für das **L** Profil Fig. 6, dessen Hauptaxen S. 26 bestimmt wurden, und dessen Hauptträgheitsmomente $\Theta' = 148$ und $\Theta'' = 17,4$ sind, berechnen

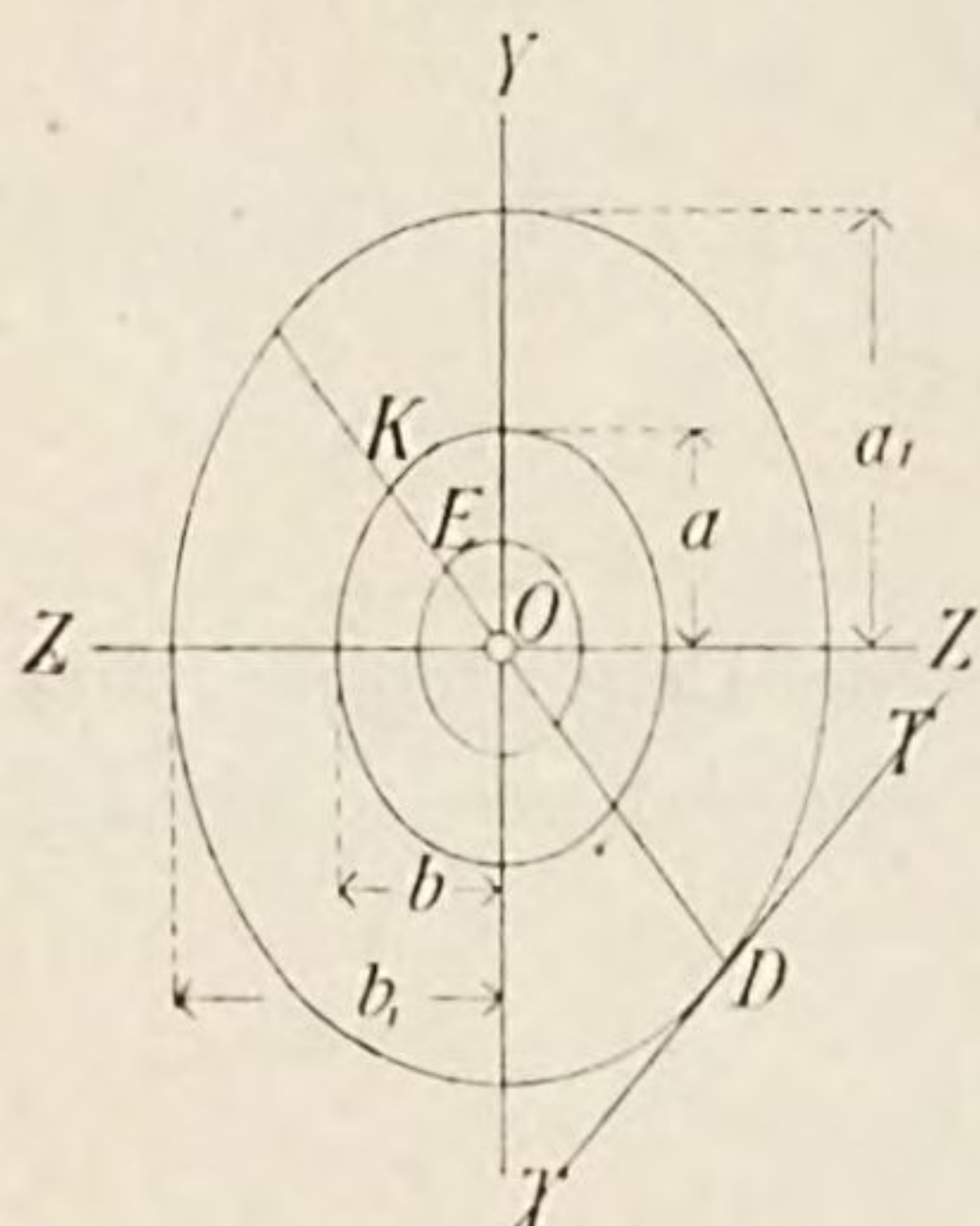
$$\text{sich die Halbaxen der Centralellipse: } a = \sqrt{\frac{148}{14}} = 3,25 \text{ cm}$$

$$\text{und } b = \sqrt{\frac{17,4}{14}} = 1,11 \text{ cm}.$$

Beispiel 3. Elliptischer Querschnitt. Das Trägheitsmoment des elliptischen Querschnitts Fig. 7 mit den Halbaxen a_1 und b_1 bezüglich der Axe ZZ ist $\frac{1}{4} a_1^3 b_1 \pi$. Daher ist die Halbaxe a der Centralellipse:

$$a = \sqrt{\frac{\frac{1}{4} a_1^3 b_1 \pi}{a_1 b_1 \pi}} = \frac{1}{2} a_1,$$

ebenso $b = \frac{1}{2} b_1$.



Die Centralellipse ist also der Begrenzungsellipse des Querschnitts ähnlich und ihre Axen und Durchmesser sind halb so gross als diejenigen der Letzteren.

Daher ist die Centralellipse des Kreises ein concentrischer Kreis mit halb so grossem Radius.

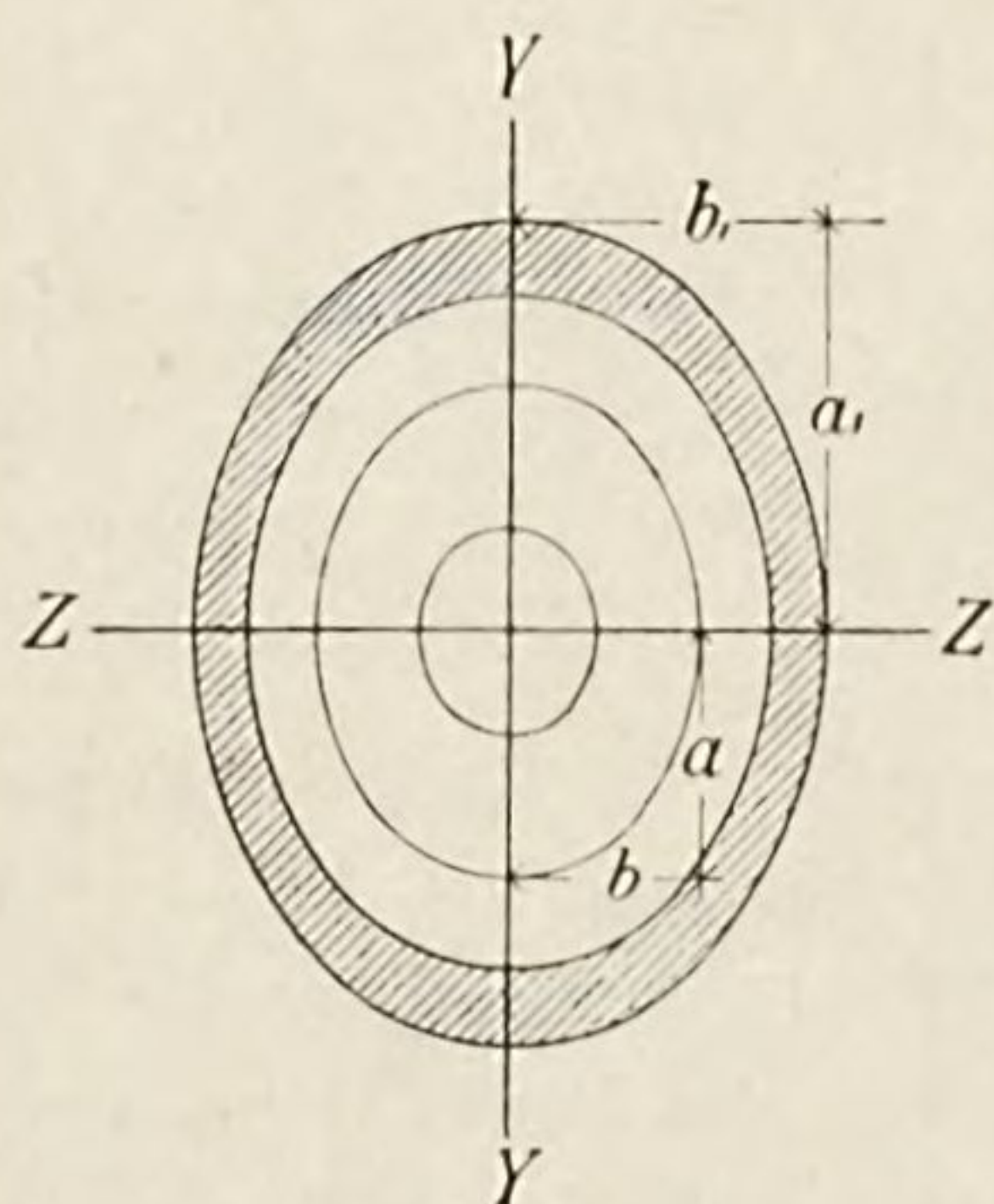
Beispiel 4. Ringförmiger, durch zwei ähnliche, concentrische Ellipsen begrenzter Querschnitt. Sind a_1 und b_1 die Halbaxen der äusseren Ellipse und νa_1 und νb_1 diejenigen der inneren, wo ν ein ächter Bruch, so ist das Trägheitsmoment des Rings für die Axe ZZ Fig. 8

$$\frac{\pi}{4} a_1^3 b_1 (1 - \nu^4),$$

daher die Halbaxe a der Centralellipse

$$a = \sqrt{\frac{\frac{1}{4} \pi a_1^3 b_1 (1 - \nu^4)}{\pi a_1 b_1 (1 - \nu^2)}} = \frac{1}{2} a_1 \sqrt{1 + \nu^2},$$

desgl. $b = \frac{1}{2} b_1 \sqrt{1 + \nu^2}$.

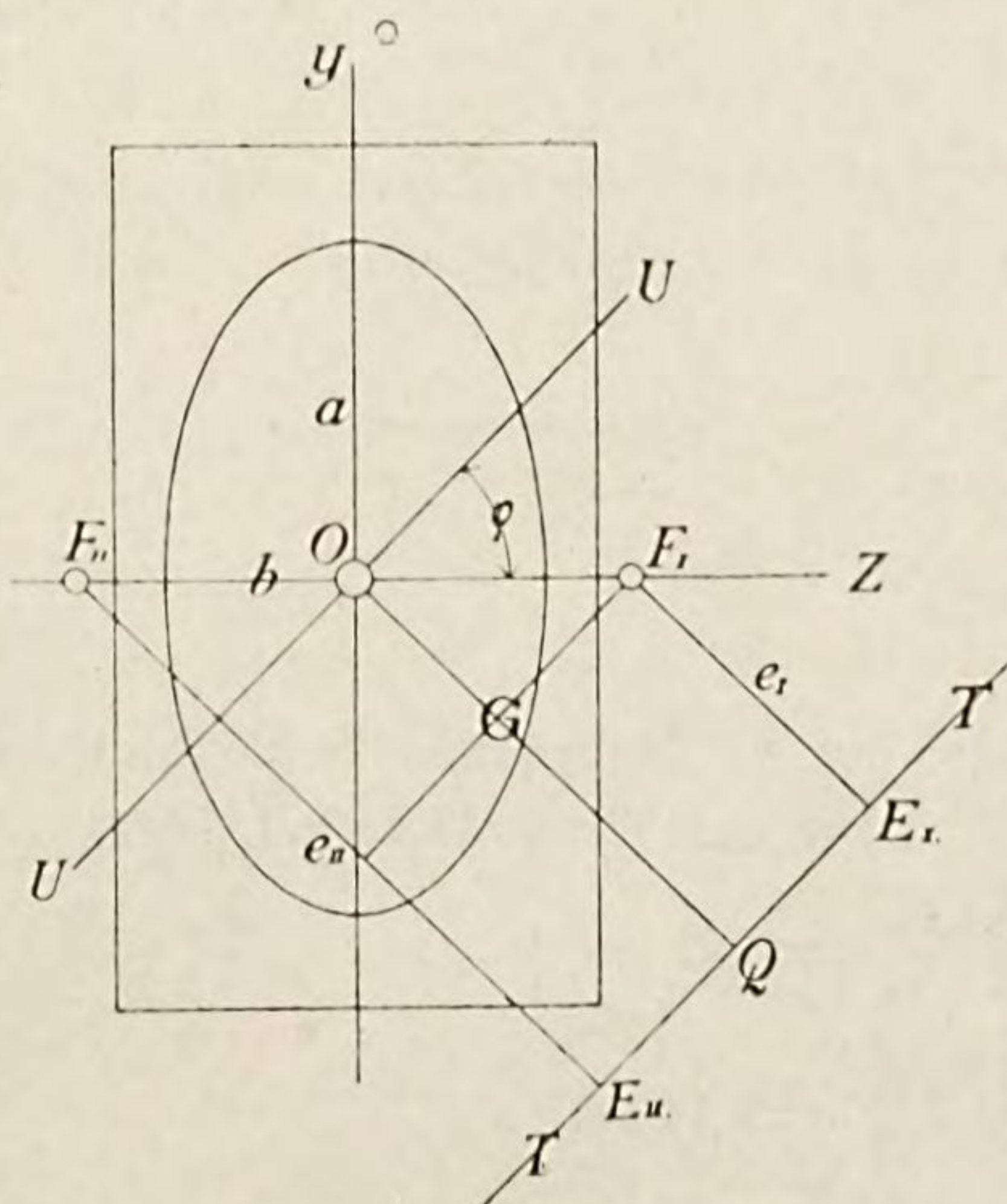


Für den Kreisring vom äusseren Radius r ist die Centralellipse ein Kreis vom Radius:

$$r_0 = \frac{1}{2} r \sqrt{1 + \nu^2}$$

Fixpunkte eines Querschnittes.

Fig. 9.



Es seien $\Theta' = a^2 F$ und $\Theta'' = b^2 F$ die Trägheitsmomente eines Querschnitts bezüglich der beiden Schwerpunkt-Hauptaxen OZ und OY Fig. 9, so ist nach Gl. 28 für die mit der ersten Hauptaxe den Winkel φ einschliessende Axe OU das Trägheitsmoment:

$$\begin{aligned} \Theta_u &= \Theta' \cos^2 \varphi + \Theta'' \sin^2 \varphi \\ &= \Theta' (1 - \sin^2 \varphi) + \Theta'' \sin^2 \varphi \\ &= F[a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi], \end{aligned}$$

und für die, zu UU parallele, um d von derselben entfernte Axe TT :

$$\Theta_T = F[a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi + d^2].$$

Trägt man auf der Z -Axe von O aus nach beiden Seiten die den Entfernungen

der Brennpunkte der Centralellipse von O entsprechende Länge $\sqrt{a^2 - b^2} = OF_1 = OF_{11}$ auf, so ist $d^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi = \overline{OQ^2} - \overline{OG^2}$

$$= (OQ + OG)(OQ - OG)$$

$$= \overline{F_1E_1} \cdot \overline{F_{11}E_{11}}$$

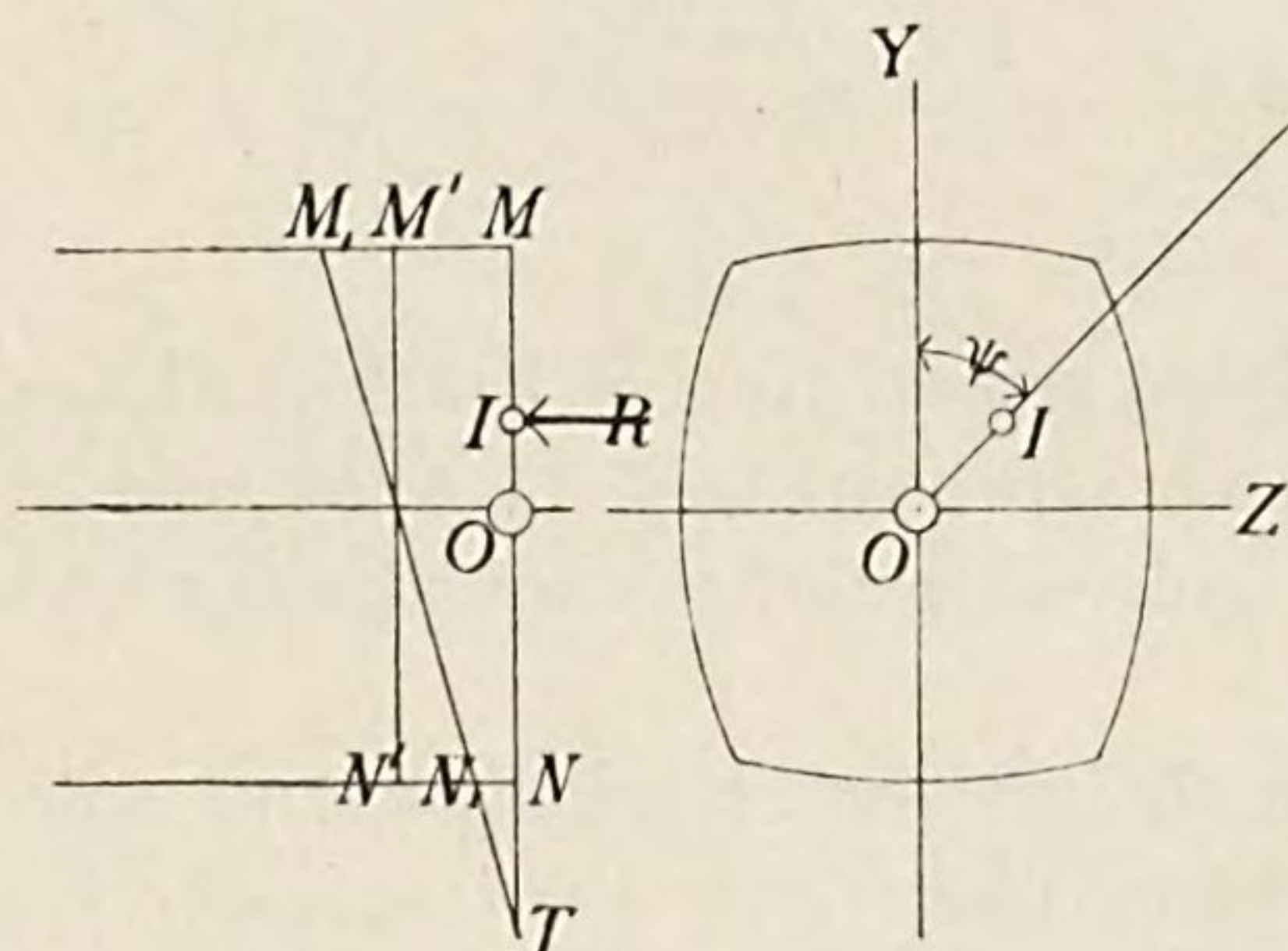
$$= e_1 e_{11},$$

daher $\Theta_T = F(a^2 + e_1 e_{11}), \dots \dots \dots (31)$
welche Gleichung zur Bestimmung der Trägheitsmomente für beliebige Axen dient, wenn die Hauptaxen und die Trägheitsradien a und b bekannt sind.

Für alle Axen TT , welche durch einen der Punkte F_1 oder F_{11} gehen, hat das Trägheitsmoment die constante Grösse $F a^2$. Es werden deshalb die Punkte F_1 und F_2 als Fixpunkte des Querschnitts bezeichnet *) Die Trägheitsellipsen dieser Punkte sind Kreise vom Halbmesser a . Ist $a = b$, so fallen die Fixpunkte mit dem Schwerpunkt der Fläche zusammen.

Mittelpunkt der Spannung, Neutralaxe, Zusammenhang beider, Kern eines Querschnitts, Maximalspannung.

1. Ein stabförmiger Körper werde im Punkte J des zur Stabaxe senkrechten ebenen Querschnitts MN Fig. 10 durch eine normal zu demselben gerichtete Aussenkraft R beansprucht.



Man transferire die Kraft R parallel ihrer Richtung nach dem Schwerpunkt O des Querschnitts indem man ein Kräftepaar vom Moment $R \cdot OJ = \mathfrak{M}$ hinzufügt, wodurch am vorherigen Zustande Nichts geändert wird. Hiedurch wird ersichtlich, dass bei eintretender Formänderung wegen der jetzt im Schwerpunkt wirkenden

Kraft R eine parallele Verschiebung von MN nach M_1N_1 , und in Folge von $\mathfrak{M}$ eine gleichzeitige Drehung des Querschnitts stattfinden muss, so dass etwa M_1N_1 der neuen Lage des Querschnitts entspricht.

Um nun die in den einzelnen Flächenelementen herrschenden Normalspannungen zu bestimmen, wird die Annahme gemacht, dass der Querschnitt auch nach der durch die Aussenwirkung hervorgebrachten Veränderung seiner Lage noch eben bleibe und in seinem Umfang nicht verändert werde. Demgemäss kann die Formänderung des Körpers an betrachteter Stelle als eine Drehung des Querschnitts um eine Axe T angesehen werden, welche durch den Schnitt der beiden Ebenen MN und M_1N_1 bestimmt ist. Diese Voraussetzung führt in Verbindung mit dem Elasticitätsgesetze (Vgl. S. 1 Theil II) zu dem Schluss, dass die Normalspannungen der einzelnen Flächenelemente sich verhalten wie ihre Entfernungen von der erwähnten Drehaxe, welche, da für sie die Spannungen gleich 0 sind, Neutralaxe

*) Mohr, Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen, Zeitsch. des Arch.- und Ing. Ver. zu Hannover, 1870.

OZ und OY sind und wenn y und z die Coordinaten des betr. Querschnittselementes bezüglich YOX vorstellen:

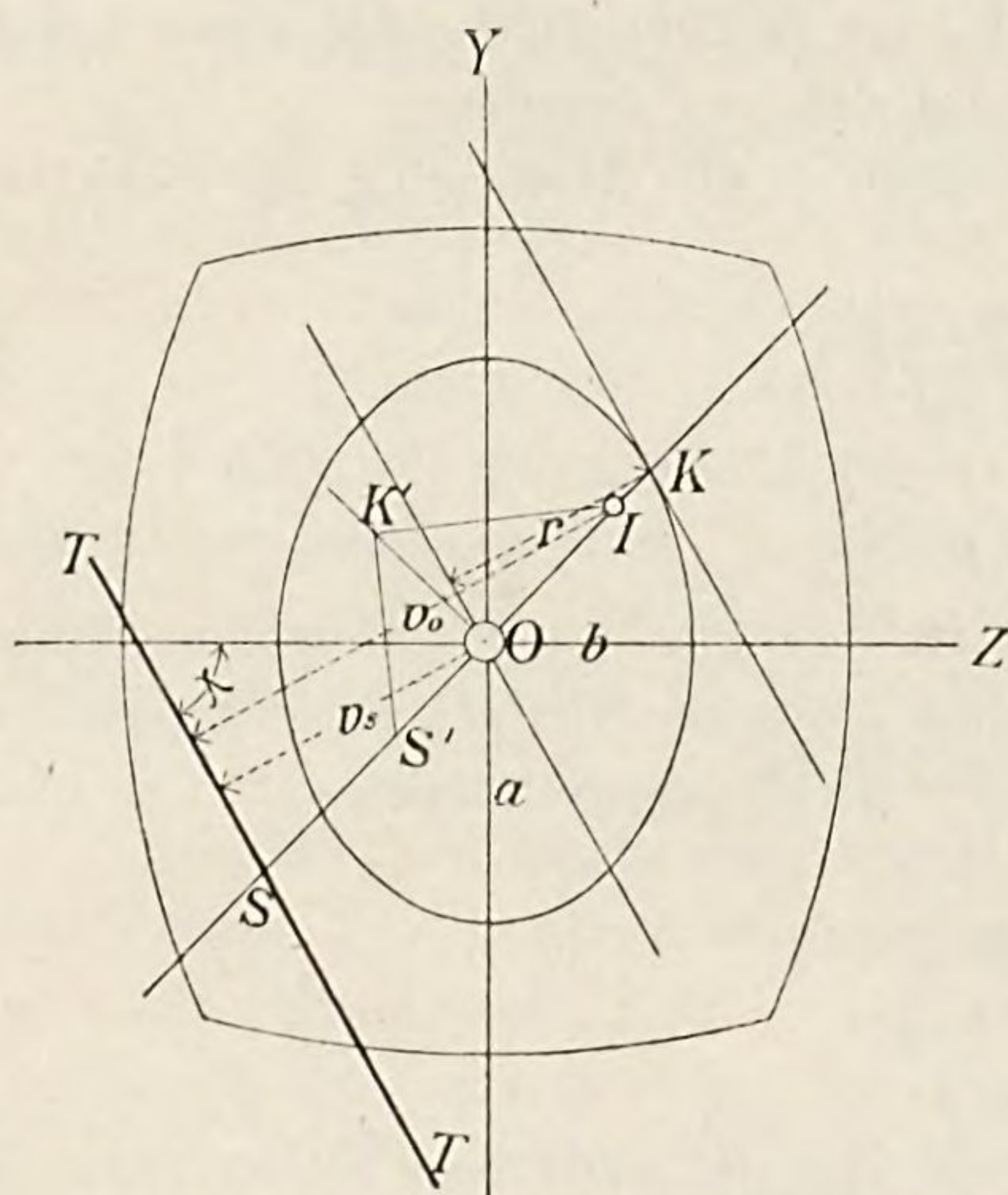
$$\alpha = \frac{R}{F} + \frac{\mathfrak{M} \cos \Psi}{\Theta'} y + \frac{\mathfrak{M} \sin \Psi}{\Theta} z \quad (35)$$

Die grössten Axialspannungen treten in den von der Neutralaxe am meisten entfernten und auf der Seite von J gelegenen Punkten des Querschnitts auf, welche durch Tangenten am Querschnitt parallel zur Neutralaxe erhalten werden. Es ist desswegen von Interesse, die Lage der Neutralaxe zu kennen.

Ihre Gleichung als diejenige einer Linie, für deren sämtliche Punkte $\alpha = 0$, ist:

$$\frac{R}{F} + \frac{\mathfrak{M} y \cos \Psi}{\Theta'} + \frac{\mathfrak{M} z \sin \Psi}{\Theta''} = 0,$$

Fig. 11.



daher sich ihr Winkel χ mit OZ und ihre Entfernung v_s vom Schwerpunkt (Fig. 11) ergeben:

$$\tan \chi = - \frac{M'' \Theta'}{M' \Theta''} = - \frac{\Theta'}{\Theta''} \tan \Psi \quad . (36)$$

$$v_s = \frac{R}{F \sqrt{\frac{M'^2}{\Theta'^2} + \frac{M''^2}{\Theta''^2}}} \quad . . (37)$$

Ist $R = 0$ so ist $v_s = 0$, d. h. wenn keine zum Querschnitt senkrechte Aussenkraft vorhanden ist, so geht die Neutralaxe durch den Schwerpunkt des Querschnitts. (Transversale Belastung.)

Ist $\Psi = 0$, so ist auch $\chi = 0$, d. h. fällt eine Hauptaxe in die Kraftebene, so ist die Neutralaxe senkrecht zur Kraftebene. In diesem

Falle ist

$$v_s = \frac{R \Theta}{F M} = \frac{\Theta}{F \cdot OJ} = \frac{r^2}{OJ} \quad (38)$$

wenn r der zugehörige Trägheitsradius.

2. Denkt man sich die Centralellipse des Querschnitts gezeichnet, deren Gleichung nach (30)

$$\frac{z^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

so ist, weil

$$\frac{2y dy}{a^2} = - \frac{2z dz}{b^2},$$

die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels einer die Ellipse im Punkte zy berührenden Geraden gegen die Z -Axe gegeben durch:

$$\frac{dy}{dz} = - \frac{a^2 z}{b^2 y}.$$

Für den Punkt K , in welchem die Centralellipse von OJ geschnitten wird, ist

$$\frac{z}{y} = \tan \Psi,$$

daher

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{a^2}{b^2} \tan \Psi$$

oder

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{\Theta'}{\Theta''} \tan \Psi.$$

Aus der Uebereinstimmung dieses Ausdrucks mit Gl. (36) geht hervor, dass für den Punkt K $\frac{dy}{dz} = \tan \chi$, d. h. dass die Neutralaxe parallel ist der Tangente an der Centralellipse im Durchschnittspunkte K mit der Kraftebene. Eine zur Neutralaxe Parallele durch den Schwerpunkt und die Schnittlinie der Kraftebene mit dem Querschnitt sind also conjugirte Durchmesser der Centralellipse.

Hiemit und durch Gl. 37 bzw. 38 ist die Lage der Neutralaxe bei gegebenem J bestimmt. Es kann übrigens ihr Abstand vom Schwerpunkt, abgesehen von genannten Gleichungen noch auf folgende Weise gefunden werden:

Nach Gl. 32 ist $Rv_0 = a^1 \int v^2 dF$, und, wenn v_0 die Entfernung des Punktes J (Fig. 11) von TT ,

daher

$$v_0 = \frac{\int v^2 dF}{\int v dF} \quad \dots \quad (39)$$

$$= \frac{r^2 F}{v_s F} = \frac{r_1^2}{v_s},$$

wenn r_1 der Trägheitsradius des Querschnitts bezüglich TT . Bezeichnet nun r den Trägheitsradius des Querschnitts bezüglich einer zur Neutralaxe TT parallelen Schwerpunktsaxe, und k den Abstand des Spannungsmittelpunktes J von dieser Schwerpunktsaxe, so ist,

da

$$r_1^2 F = r^2 F + v_s^2 F$$

und

$$v_0 = v_s + k,$$

$$v_s k = r^2 \quad \dots \quad (40)$$

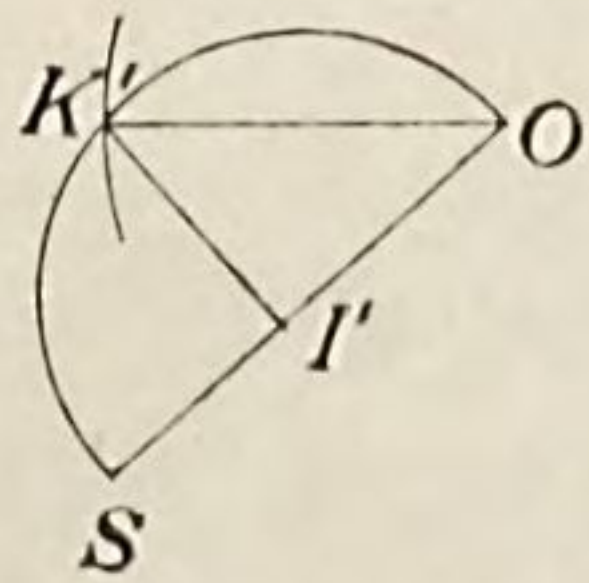
in welchem allgemeinerem Gesetz auch Gl. 38 enthalten ist;

$$\text{oder auch: } \overline{SO} \cdot \overline{OJ} = \overline{OK}^2 \text{ (Fig. 11)}$$

d. h. der in der Schnittlinie von Kraftebene und Querschnitt gemessene halbe Durchmesser der Centralellipse ist die mittlere Proportionale zwischen den in derselben Geraden gemessenen Abständen des Spannungsmittelpunktes und der Neutralaxe vom Schwerpunkt. Hieraus ergibt sich die Construction der Neutralaxe: Man ziehe den Durchmesser JO , (Fig. 11) errichte OK' senkrecht zu OK , schneide mit dem Radius OK von J aus $JK' = OK$ ab, ziehe $K'S' \perp JK'$ und mache $OS = JS'$, so ist S ein Punkt der Neutralaxe, deren Richtung parallel ist der Tangente in K an der Centralellipse:

$$\frac{SO}{OK} = \frac{OK}{OJ}$$

Fig. 12.



3. Ist umgekehrt die Neutralaxe gegeben und der Spannungsmittelpunkt gesucht, so zeichnet man den zu TT in der Centralellipse conjugirten Durchmesser SK Fig. 11, auf welchem J in dem durch Gl. 40 bestimmten Abstand von O sich befindet: Man beschreibt über SO einen Halbkreis Fig. 12, schneidet mit dem Halbmesser OK von O aus OK' ab und zieht $K'J'$ senkrecht zu SO , so ist OJ' der gesuchte Abstand.

Eine Parallele zu TT , symmetrisch zu O auf der entgegengesetzten Seite des Schwerpunktes befindlich, ist die Polare zum Pol J in Bezug auf die Centralellipse. Man nennt daher die Neutralaxe die Antipolare des Spannungsmittelpunktes J , oder auch J den Antipol zur Neutralaxe als Polaren.

4. Je mehr der Spannungsmittelpunkt sich dem Schwerpunkt nähert, desto mehr entfernt sich die Neutralaxe von diesem, und für $OJ=0$ ist $OS=\infty$. Umgekehrt rückt, wenn die Neutralaxe an den Schwerpunkt herantritt, der Spannungsmittelpunkt in unendliche Entfernung.

Wird die Neutralaxe parallel einer bestimmten Richtung verschoben, so bewegt sich der Spannungsmittelpunkt auf einem zur erwähnten Richtung in der Central-ellipse conjugirtem Durchmesser. Umgekehrt: Bewegt sich der Spannungsmittelpunkt auf einem Durchmesser, so verschiebt sich die Neutralaxe parallel der zu jenem Durchmesser conjugirten Richtung.

Dreht sich die Neutralaxe um einen festen Punkt, so beschreibt der Spannungsmittelpunkt eine Gerade. Diese ist in Bezug auf die Centralellipse die Antipolare jenes festen Punktes; sie würde zur Neutralaxe werden, wenn jener Punkt Mittelpunkt der Spannung wäre, ihre Richtung ist daher conjugirt zu dem durch den festen Punkt gehenden Durchmesser. Bewegt sich die Neutralaxe so, dass sie immer eine gegebene Curve berührt, so beschreibt der Mittelpunkt der Spannung ebenfalls eine Curve. Letztere kann durch Wiederholung der Construction Fig. 12 leicht gezeichnet werden.

Kern eines Querschnitts.

Wenn die Neutralaxe einen Querschnitt so umhüllt, dass sie, stets Tangente an ihm bleibend, nie in denselben eindringt, so beschreibt der Mittelpunkt der Spannung die Umfangslinie einer Fläche, welche als **Kern** des Querschnitts bezeichnet wird.

Es ist klar, dass, so lange der Angriffspunkt von R innerhalb des Kerns bleibt, die Neutralaxe ausserhalb des Querschnitts zu liegen kommt und im Querschnitt nur Spannungen von gleichen Vorzeichen (entweder nur Zug oder nur Druck) auftreten. Ueberschreitet der Angriffspunkt von R den Kern, so tritt die Neutralaxe in den Querschnitt ein und es findet zweierlei Spannung (Zug und Druck) statt.

Durch Rechnung findet man für beliebige Lagen der den Querschnittsrand berührenden Neutralaxe die zugehörigen Kernpunkte aus Gl. 37 oder 40 unter gleichzeitiger Berücksichtigung des Satzes S. 32.

Die auf den Hauptaxen gelegenen Kernpunkte ergeben sich nach Gl. 38 oder 40 aus

$$OJ = \frac{\Theta}{F_n} = \frac{r^2}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

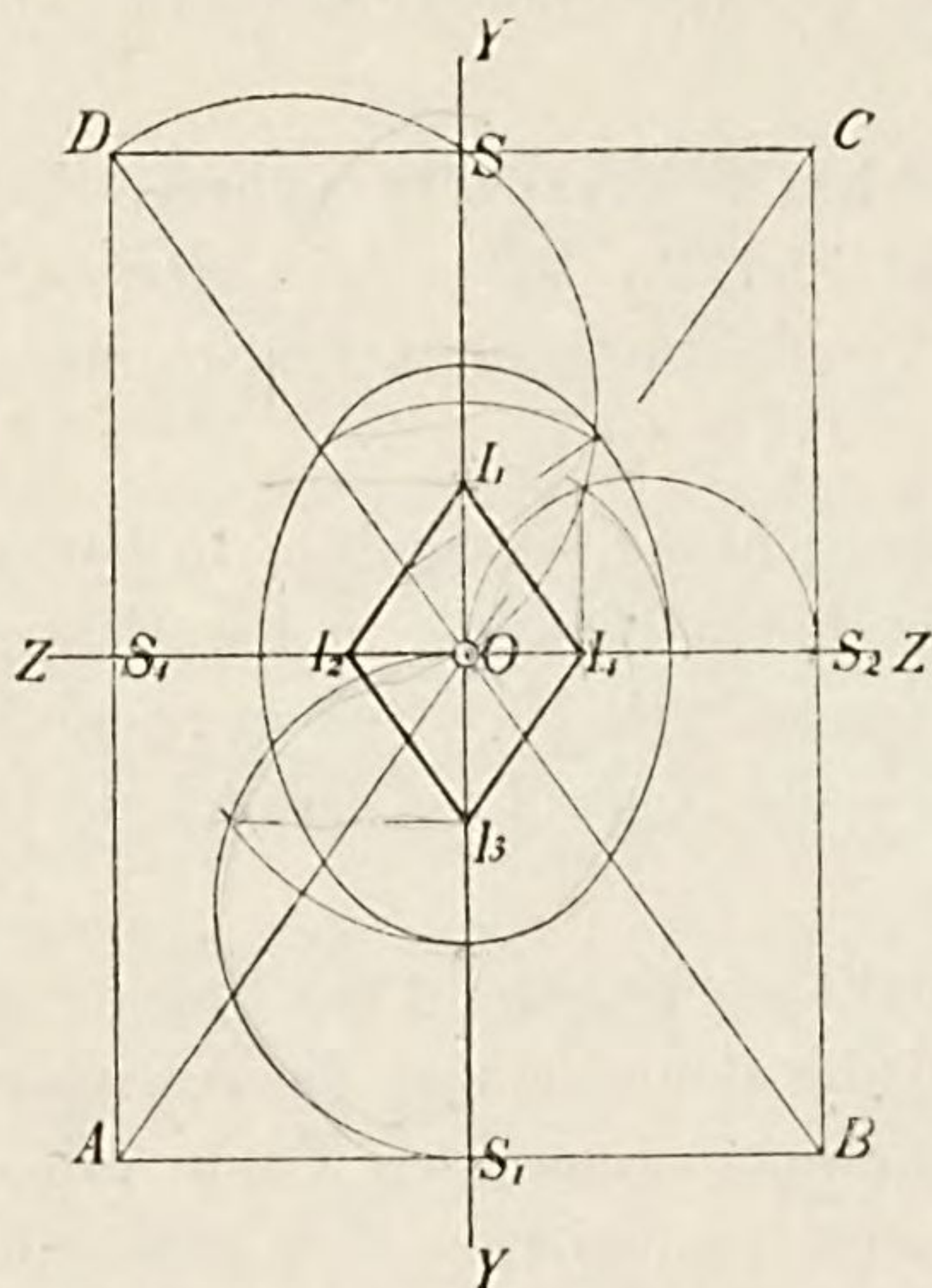
wenn OJ die Entfernung des Kernpunktes vom Schwerpunkt (Kernweite), Θ das Trägheitsmoment des Querschnitts bezüglich der anderen Hauptsache oder r den entsprechenden Trägheitshalbmesser, n die Entfernung des dem Kernpunkt gegenüberliegenden Querschnittsrandes vom Schwerpunkt bezeichnen.

Graphisch kann der Kern eines Querschnitts durch Wiederholung der Konstruktion Fig. 12 S.32 leicht gefunden werden.

Beispiel 1. Zur Bestimmung des Kerns eines rechteckförmigen Querschnitts (Fig. 13) denke man sich die Neutralaxe zuerst zusammenfallend mit $A B$. Der Kernpunkt J_1 , welcher dieser Lage entspricht, befindet sich in dem zu $A B$ conjugirten Durch-

messer der Centralellipse, d. i. in der Hauptaxe $Y Y$. Seine Entfernung von O

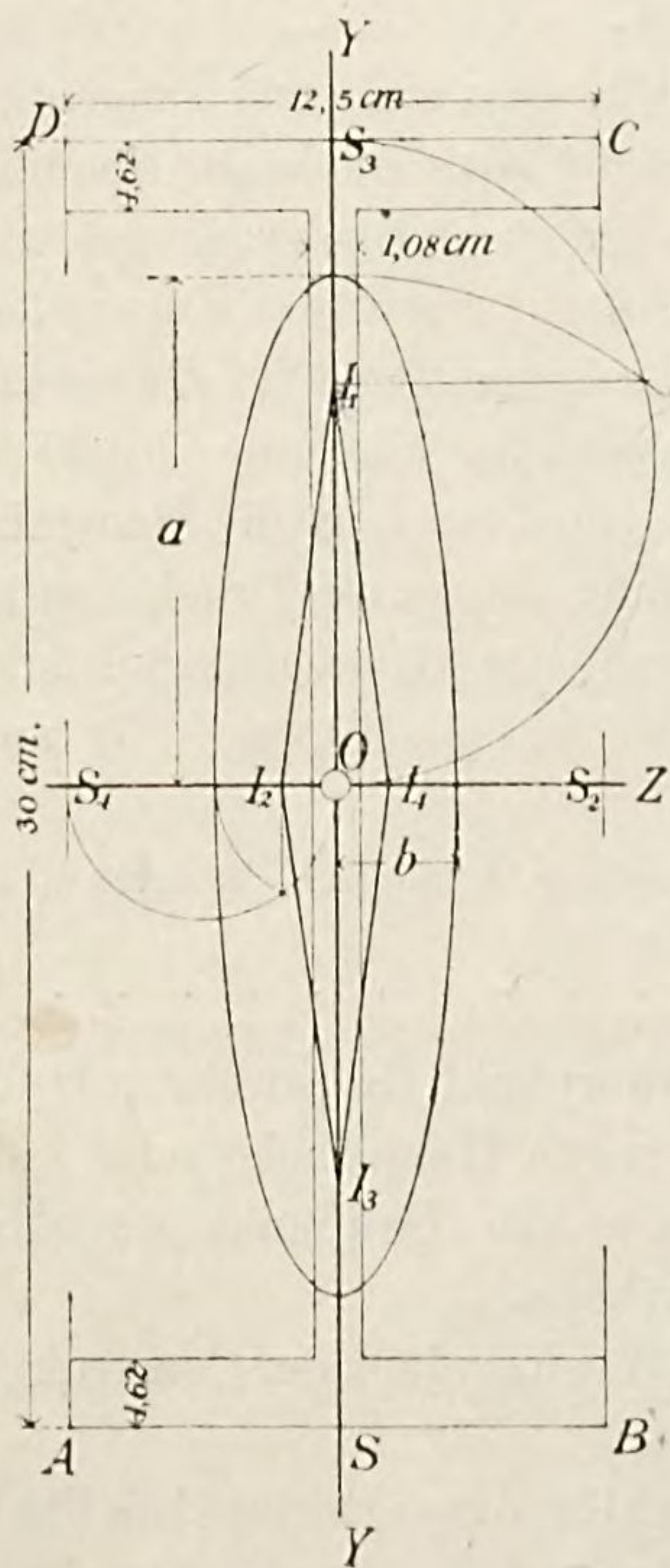
Fig. 13.



ergibt sich nach oben mittels des über $O S_1$ beschriebenen Halbkreises. Ebenso findet sich mittels des Halbkreises über $O S_2$ der der Neutralaxe $B C$ zugehörige Kernpunkt J_2 . Den Stellungen $C D$ und $D A$ endlich der Neutralaxe entsprechen die Eckpunkte J_3 und J_4 des Kerns, welcher hiemit vollständig bestimmt ist, denn während der Drehung der Neutralaxe um die Punkte B, C, D und A beschreibt der Spannungsmittelpunkt die Geraden $J_1 J_2, J_2 J_3, J_3 J_4$ und $J_4 J_1$. Letztere könnten auch ohne vorherige Bestimmung der Kerneckpunkte gefunden werden indem man von den Drehpunkten A, B u. s. f. der Neutralaxe ausgeht. So entspricht dem Drehpunkt D eine gerade Kernbegrenzungslinie $J_3 J_4$, deren Richtung conjugirt ist zu $D O$, also parallel ist zur Diagonale $A C$ und deren Lage mittels des Halbkreises über $D O$ erhalten wird u. s. f.

Durch Rechnung findet man die Eckpunkte des Kerns auf Grund der Gleichung 38. Es ist, wenn die Höhe des Rechtecks $A D$ mit h und die Breite mit b bezeichnet wird:

Fig. 14.



$$O J_1 = \frac{\frac{1}{12} b h^3}{b \cdot h \cdot \frac{h}{2}} = \frac{h}{6} = O J_3$$

ebenso
$$O J_2 = O J_4 = \frac{\frac{1}{12} h b^3}{b \cdot h \cdot \frac{b}{2}} = \frac{b}{6}.$$

Es liegen demnach die Kern-Eckpunkte um $\frac{1}{6}$ der Höhe, beziehungsweise Breite des Querschnitts von den Kanten entfernt.

Beispiel 2. Der Kern des **I** förmigen Profils ergibt sich in ähnlicher Weise wie der des rechteckförmigen Querschnitts, indem die Neutralaxe, das Profil fortwährend berührend, nach einander die Stellungen $A B, B C, C D, D A$ einnimmt. Die Kerneckpunkte werden also durch die in Fig. 14 dargestellte Konstruktion bestimmt.

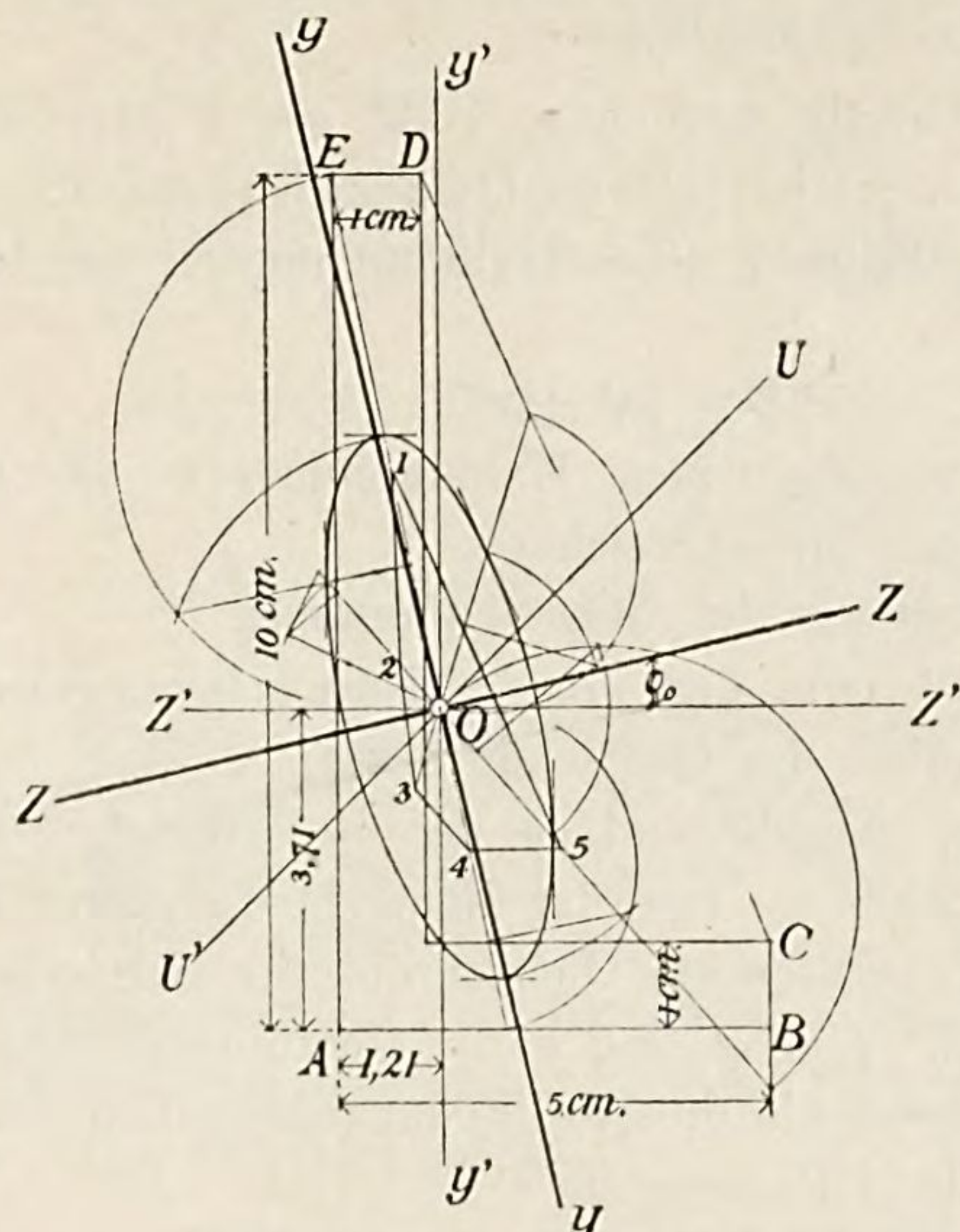
Auf rechnerischem Wege wird nach Gl. 38 erhalten:

$$O J_1 = \frac{a^2}{O S} = \frac{11,93^2}{15} = 9,5 \text{ cm}$$

und
$$O J_2 = \frac{b^2}{O S_2} = \frac{2,76^2}{6,25} = 1,22 \text{ cm}.$$

Beispiel 3. Der Kern des **L** Profils Fig. 6 wird erhalten, wenn man der

Neutralaxe nach einander die Stellungen AB , BC , CD , DE , EA gibt und die diesen Stellungen entsprechenden Spannungsmittelpunkte 1, 2...5 wie oben bestimmt.



Auf rechnerischem Wege ergibt sich nach Gl. 40 z. E. der Punkt 1, welcher auf dem zu AB conjugirten Durchmesser der Centralellipse liegt, durch seine Entfernung k_1 von $Z'Z'$:

$$k_1 = \frac{r_1^2}{3.71}, \text{ wenn } r_1 = \sqrt{\frac{141.53}{14}} \text{ der}$$

Trägheitsradius des Querschnitts bezüglich $Z'Z'$ ist,

$$\text{daher } k_1 = \frac{10.11}{3.71} = 2.725.$$

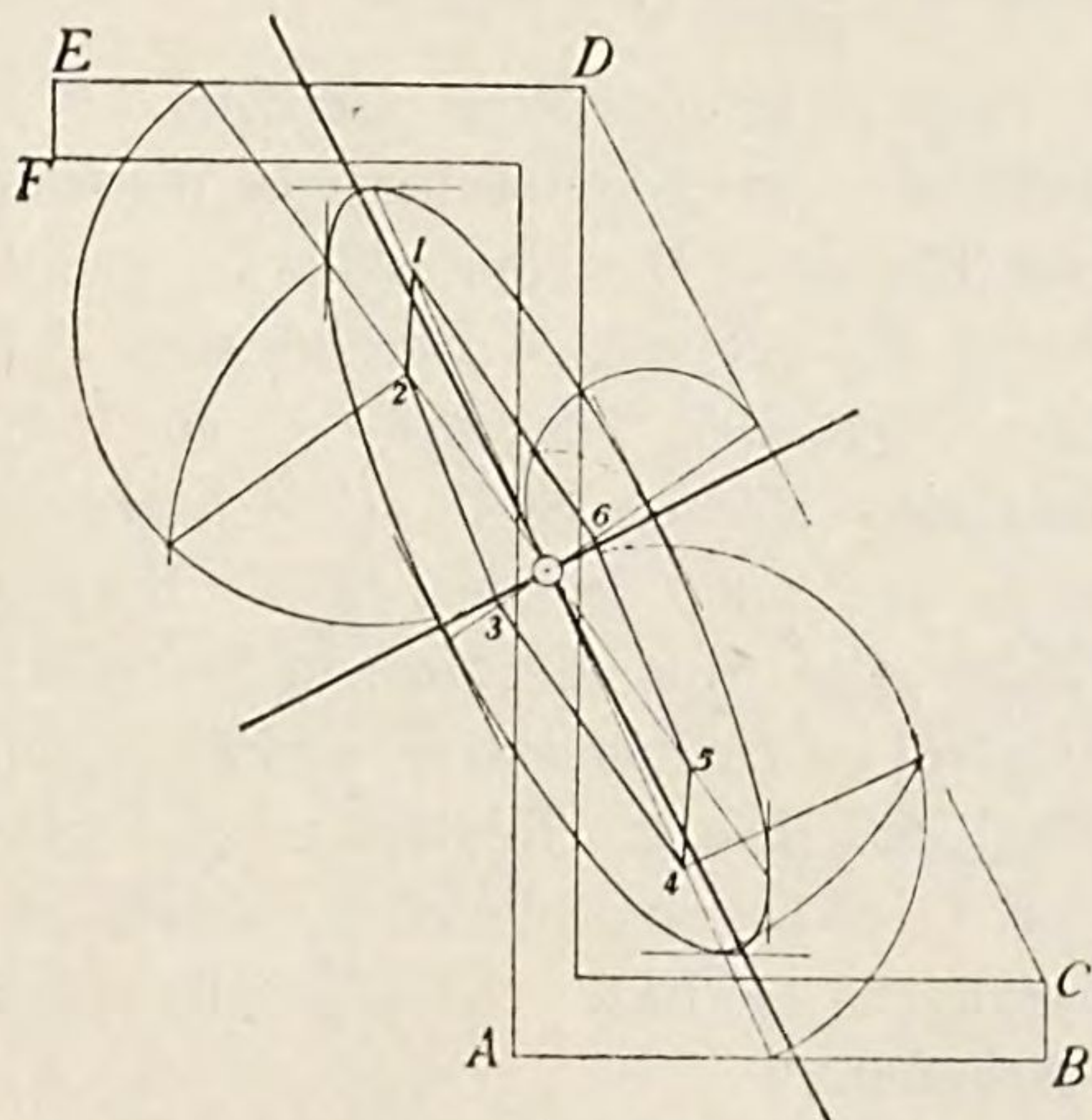
Analog ist bezüglich des Punktes 2, gelegen auf dem zu BC conjugirten Durchmesser:

$$k_2 = \frac{r_2^2}{3.79} = \frac{1.716}{3.79} = 0.453 \text{ u. s. f.}$$

Beispiel 4. Es sei der Kern des

Z Profils Nr. 10 Tab. S. 19 zu bestimmen.

Fig. 15.



Aus der Tabelle ergeben sich die Hauptachsen durch $\tan \alpha = 0.52$ und die Hauptträgheitsmomente $\Theta' = 272$ und $\Theta'' = 21.1$, daher die Halbaxen der Centralellipse:

$$a = 4.36 \text{ und } b = 1.22 \text{ cm.}$$

Man zeichnet nun diejenigen Durchmesser, welche den Richtungen AB , BC , CD conjugirt sind, und erhält auf denselben wie aus Fig. 15 zu sehen, die Eckpunkte 1, 2...6 des Kerns.

Beispiel 5. Kern des ellipsenförmigen Querschnitts. Ist TT eine Tangente an der Ellipse im Punkte D Fig. 7, so liegt der dieser Stellung

der Neutralaxe entsprechende Kernpunkt auf der Geraden OD so, dass seine Entfernung von O gleich ist:

$$\overline{OE} = \frac{\overline{OK}^2}{\overline{OD}}.$$

Da nun

$$\overline{OK} = \frac{1}{2} \overline{OD},$$

so ist

$$\overline{OE} = \frac{\overline{OD}}{4},$$

d. h. der Kern ist eine Ellipse, welche der gegebenen ähnlich ist und deren Durchmesser viermal kleiner sind als die entsprechenden Durchmesser der Begrenzungsellipse.

Fig. 7.

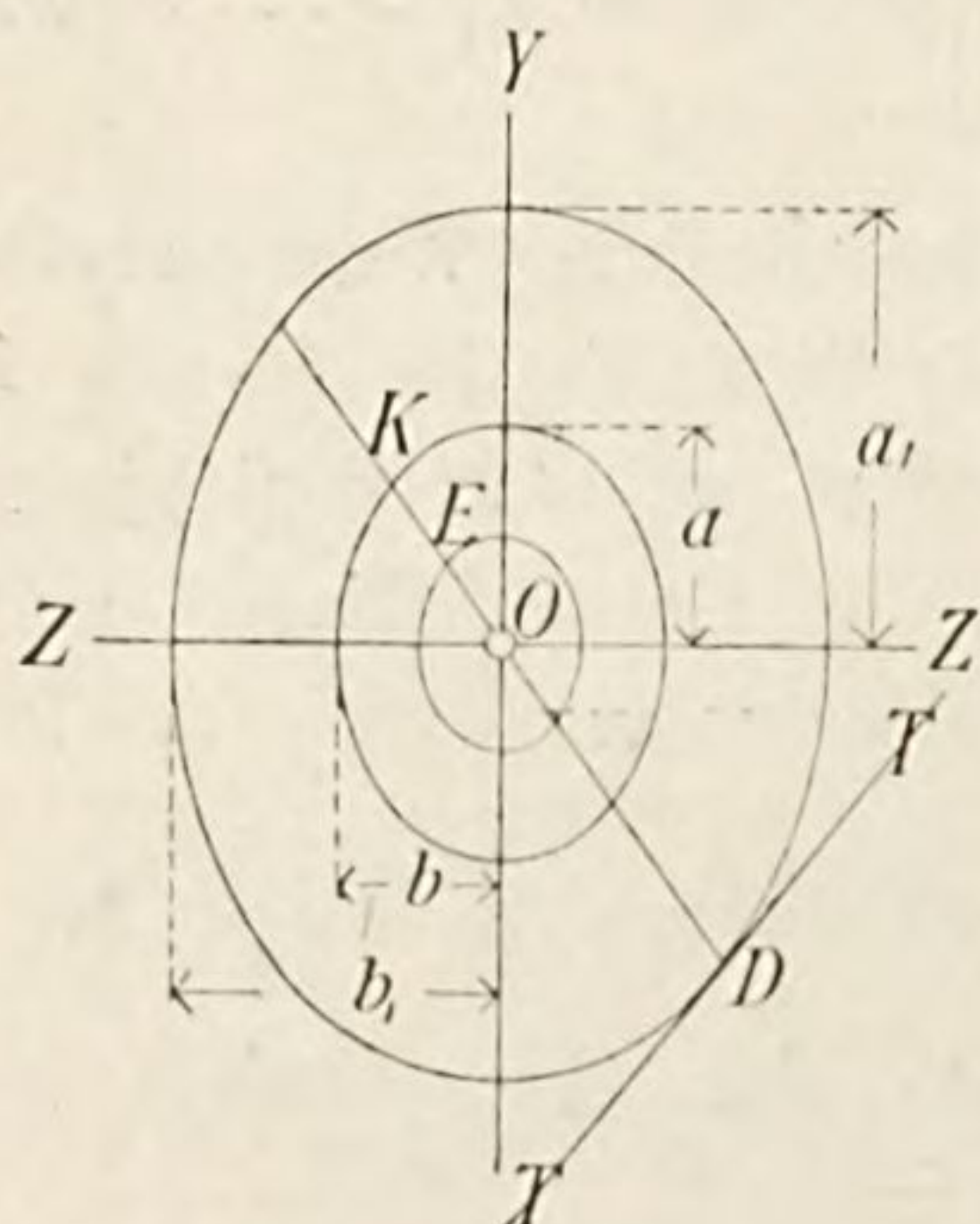


Fig. 8.

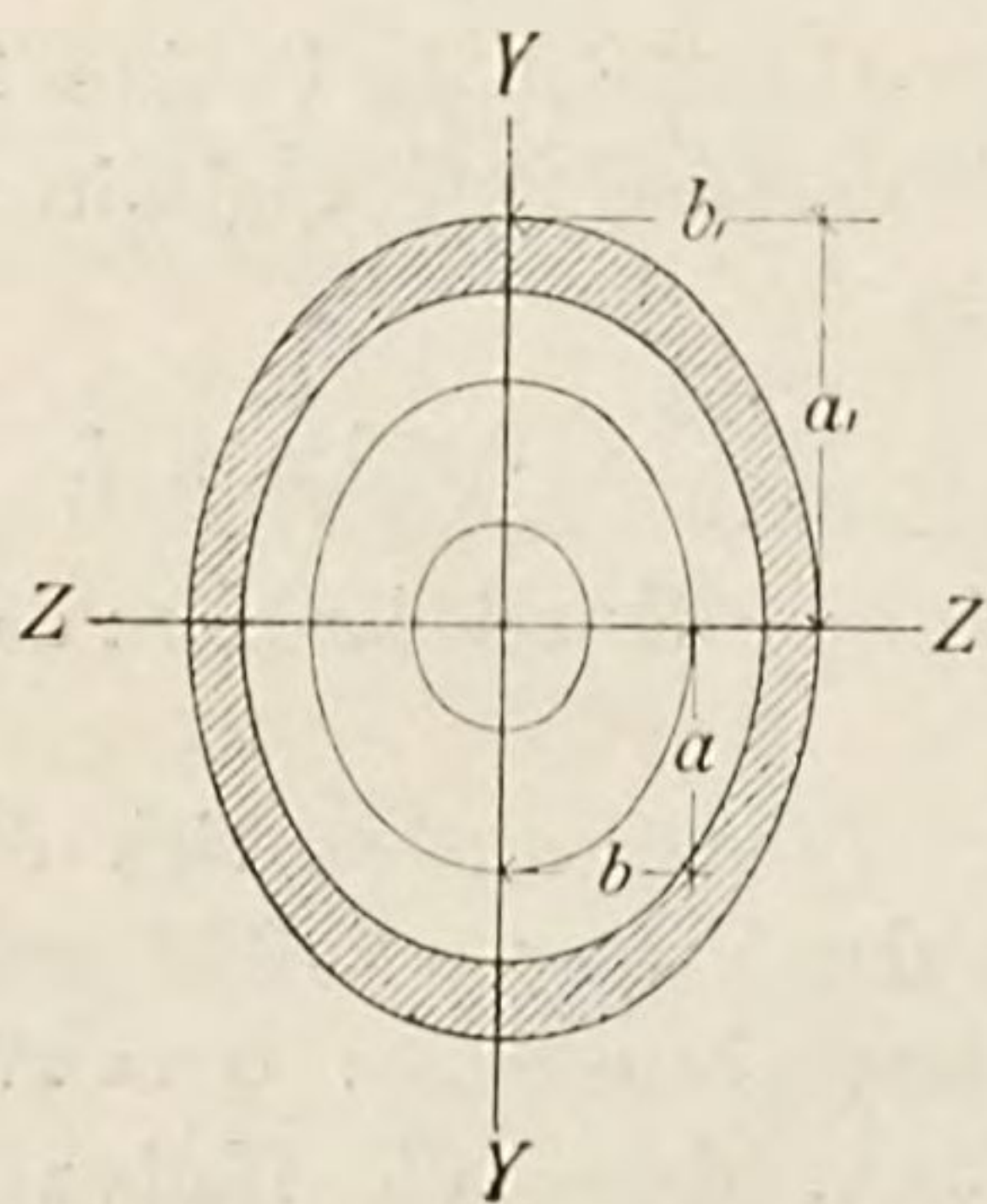
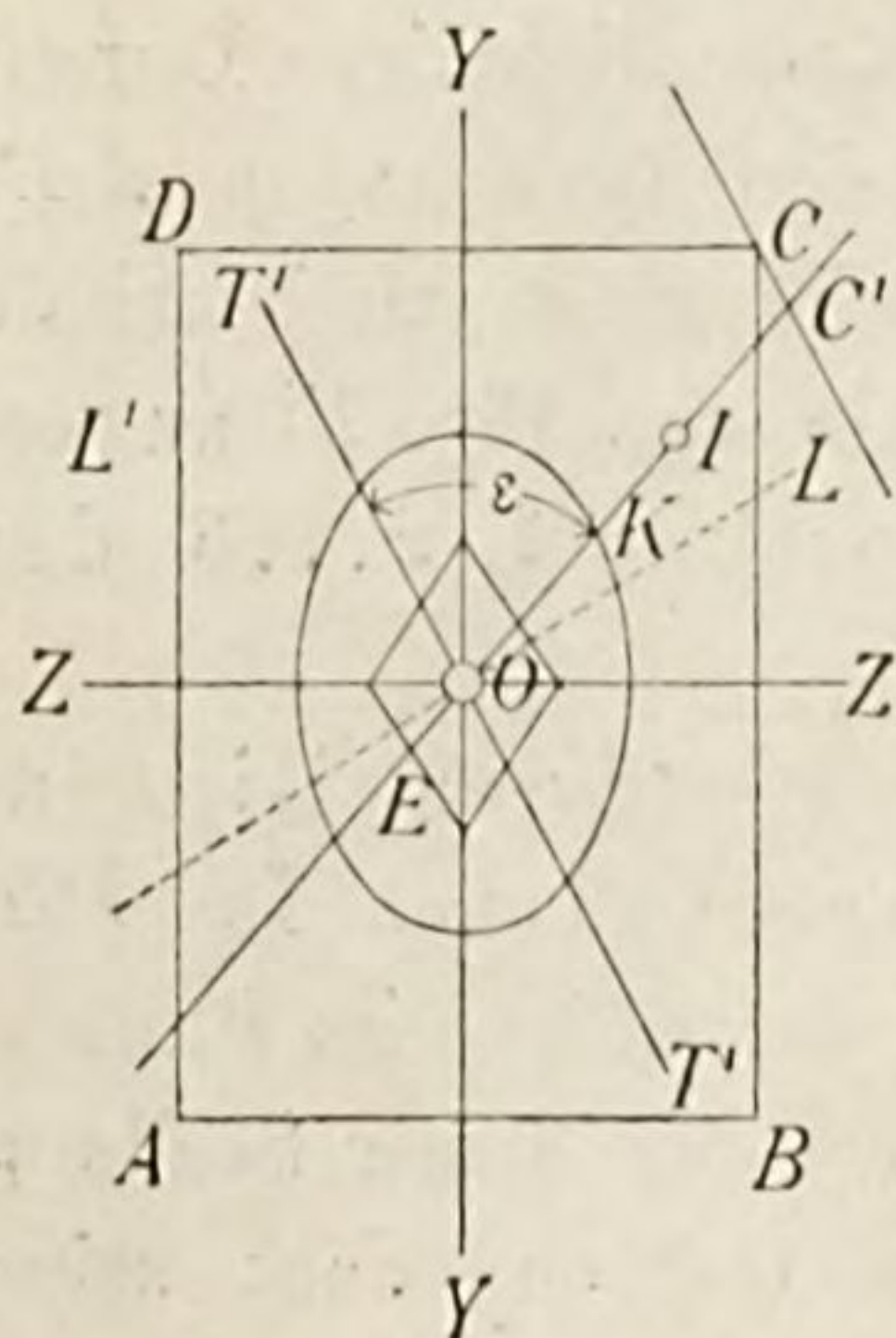


Fig. 16.



Ähnlich erhält man nach S. 28 als Kern des ringförmigen elliptischen Querschnitts (Fig. 8) gleichfalls eine Ellipse, deren Halbdurchmesser gegeben sind durch

$$OE = \frac{1}{4}(1 + \nu^2),$$

wenn r die entsprechenden Halbdurchmesser der gegebenen äusseren Ellipse bezeichnen.

Maximum der Normalspannung.

Nach S. 31 tritt die grösste Normalspannung in demjenigen Punkte des Querschnitts auf, welcher, auf der Seite des Angriffspunktes der Resultirenden gelegen, am weitesten von der Neutralaxe entfernt ist und durch Tangenten am Querschnitt zur Neutralaxe erhalten wird. Sind y und z die Coordinaten dieses Punktes, so kann die grösste Faserspannung berechnet werden aus der Gleichung 35

$$\alpha = \frac{R}{F} + \frac{\mathfrak{M} \cos \Psi y}{\Theta'} + \frac{\mathfrak{M} \sin \Psi z}{\Theta''}$$

und wenn $R = 0$, aus

$$\alpha = \frac{\mathfrak{M} \cos \Psi y}{\Theta'} + \frac{\mathfrak{M} \sin \Psi z}{\Theta''} \quad . \quad . \quad (35')$$

Einfacher führt folgender Weg zum Ziel: R sei die zum Querschnitt senkrechte Resultirende, denselben in J schneidend (Fig. 16). Die Neutralaxe ist parallel zu dem, der Geraden OJ conjugirten Durchmesser $T'T'$, und eine zu letzterem parallele Tangente CC' am Profilrand berührt denselben an der Stelle C der grössten Spannung. Man zerlege nun, nachdem $T'T'$ bekannt, das in der Angriffssaxe OJ wirkende Moment $\mathfrak{M}$, anstatt nach den Hauptaxen, in Componenten senkrecht und parallel zur Neutralaxe. Die zur Neutralaxe senkrechte Componente $\mathfrak{M} \sin \varepsilon$ ist es ausschliesslich, welche eine Drehung des Querschnitts bewirkt. Daher ist die grösste in C auftretende Spannung:

$$\alpha = \frac{R}{F} + \frac{\mathfrak{M} \sin \varepsilon m}{\Theta}$$

wobei Θ das Trägheitsmoment des Querschnitts bezüglich $T'T'$ und m den senkrechten Abstand des Punktes C von dieser Axe bezeichnen.

Da nun
und
so hat man

$$\Theta = F \cdot \overline{OK}^2 \sin^2 \varepsilon$$

$$m = \overline{OC'} \sin \varepsilon,$$

$$\alpha = \frac{R}{F} + \frac{\mathfrak{M} \overline{OC'}}{F \cdot \overline{OK}^2}$$

Ist nun der Kern des Profils eingezeichnet und ist E der Schnitt der Angriffsaxe mit der dem Angriffspunkte J gegenüber liegenden Kernbegrenzung, so ist

$$\frac{\overline{OC'}}{\overline{OK}^2} = \frac{1}{\overline{OE}},$$

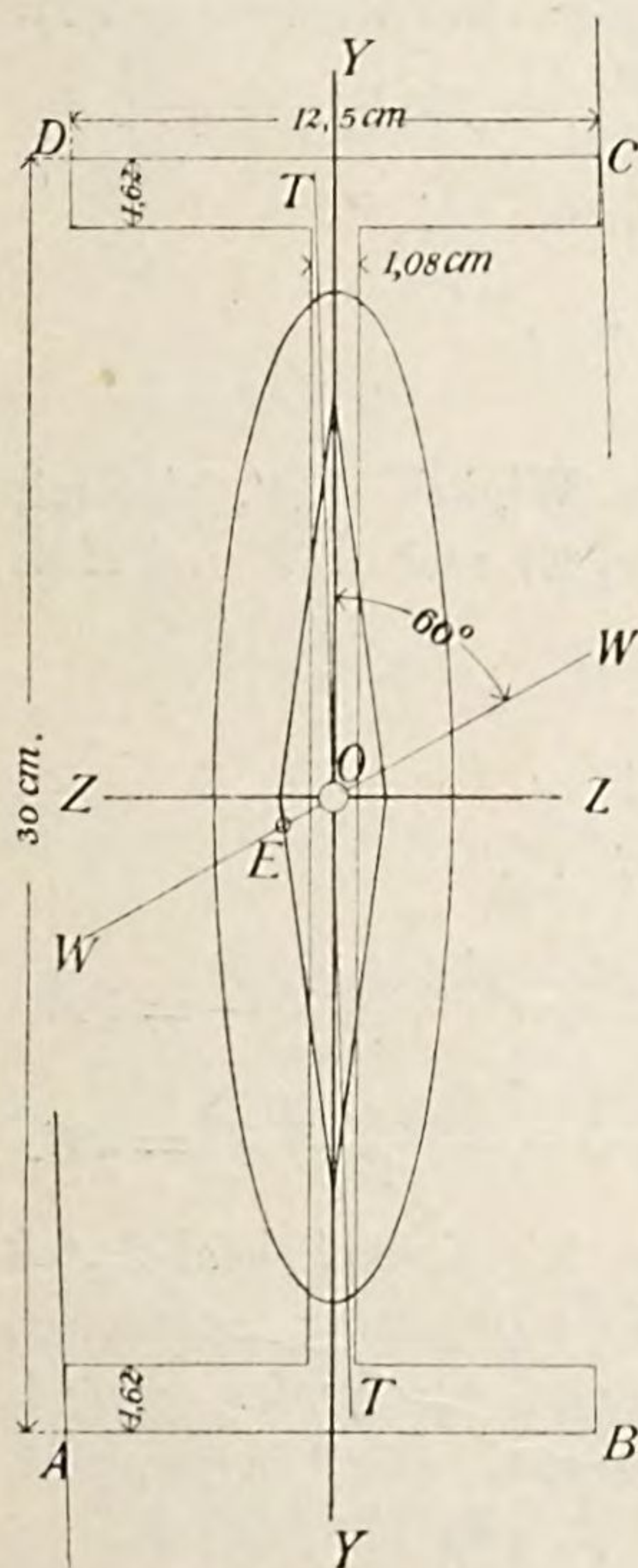
daher

$$a = \frac{R}{F} + \frac{\mathfrak{M}}{F \cdot OE} \dots \dots \dots (42)$$

d. h. die Maximalspannung im Profilrande C ist gleich $\frac{R}{F}$ plus dem Angriffsmoment M dividirt durch das Produkt aus der Querschnittsfläche und der dem Profilrande gegenüberliegenden Kernweite.

Mit Hülfe dieses Satzes lässt sich einfach auch die Frage beantworten, welche Lage der Angriffssaxe OJ bei constantem R und $\mathfrak{M}$ die ungünstigste Beanspruchung eines Querschnitts zur Folge hat: Der Werth von α wird zum Maximum, wenn OE seinen kleinsten Werth erreicht. Es geben also die von O auf die Kernbegrenzung errichteten Senkrechten (OL Fig. 16) die ungünstigsten Belastungsebenen an, während dem Maximum der Kernweite die wenigst gefährliche Lage der Angriffssaxe (hier OY) entspricht.

Fig. 17.



Ist keine zum Querschnitt senkrechte Resultirende R vorhanden und der Stab nur durch äussere Kräfte senkrecht zur Stabaxe beansprucht, so geht Gl. 42 über in

$$a = \frac{\mathfrak{M}^*)}{F.O.E} \dots \dots \dots (42')$$

Beispiel 1. Der **I** Träger Fig. 17, einem Kappengewölbe als Widerlager dienend, hat einem Angriffsmoment $= 700m\ kg$, dessen Ebene mit YY den Winkel von 60° einschliesst, Widerstand zu leisten. Es ist die grösste Normalspannung zu bestimmen.

Dieselbe findet nach oben in den Punkten A und C statt. Da $F = 69,4 \text{ qcm}$ und $O E$, wie aus der Zeichnung zu entnehmen $= 1,32 \text{ cm}$, so ist nach Gl. (42') die grösste Zug- oder Druckspannung:

$$\alpha = \frac{70000}{69,4 \cdot 1,31} = 768 \text{ kg per qcm.}$$

Andere Lösung.

Man hat $m \cos \Psi = 35000 \text{ cmkg}$

und $\mathfrak{M} \sin \Psi = 60621,75 \text{ cmkg.}$

Die Trägheitsmomente bezüglich der Hauptachsen

sind:

$$ZZ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Theta' = 9888$$

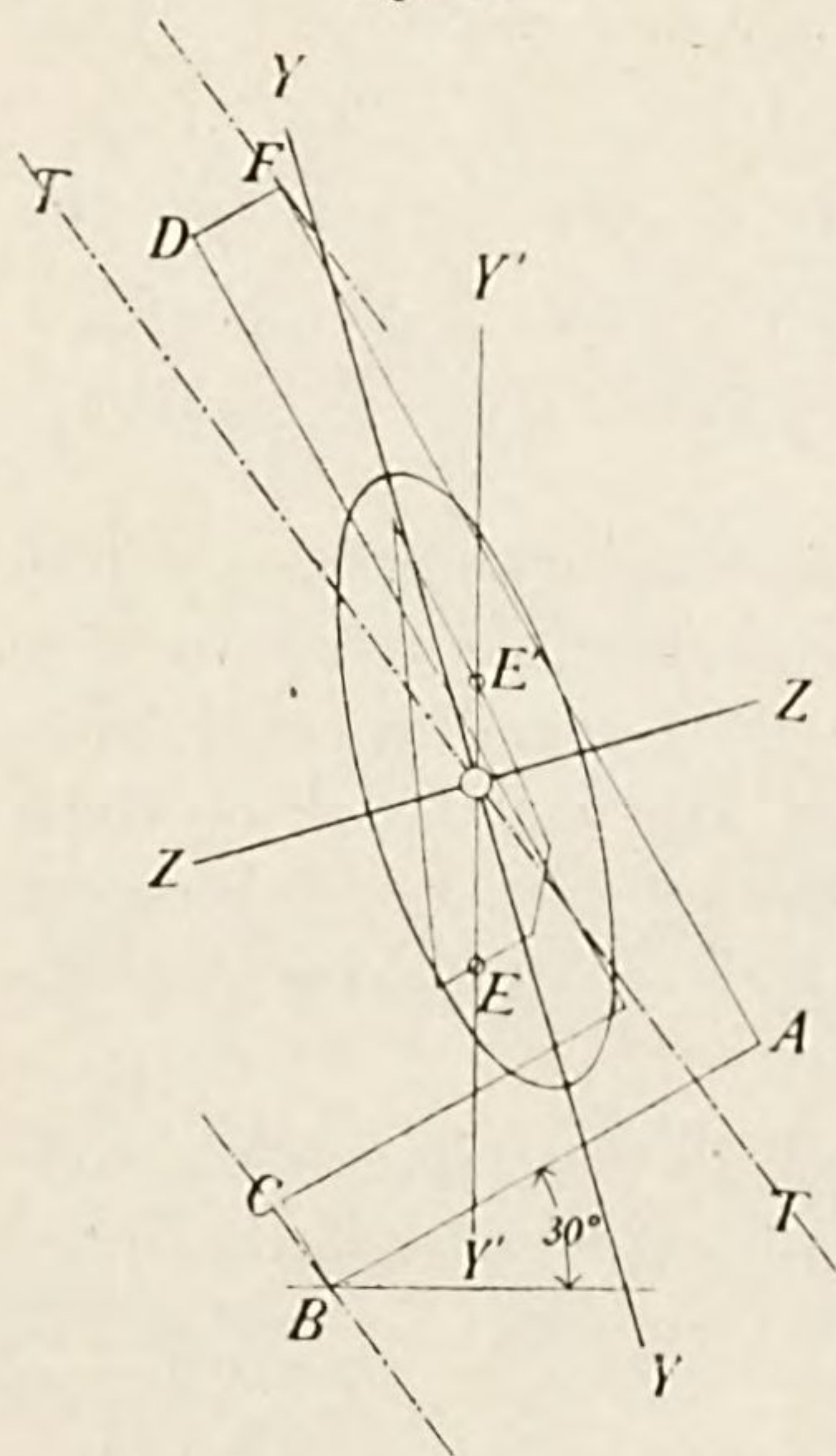
$$Y Y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \theta'' = 530$$

*) Vgl. Asimont, Hauptspannung und Sekundärspannung. Zeitsch. f. Baukunde 1880.

daher nach Gl. (35'):

$$\alpha = \frac{35000 \cdot 15}{9888} + \frac{60621,75 \cdot 6,25}{530} \\ = 53 + 714,8 = 767,8 \text{ kg per qcm.}$$

Fig. 18.



Beispiel 2. Das L Eisen Fig. 6 ist auf 3 m Länge in nebenstehender Lage (Fig. 18) mit beiden Enden horizontal eingespannt und trägt eine verticale gleichmässig vertheilte, im Schwerpunkt des Profils wirkende Last $q = 120 \text{ kg}$. Welches ist die grösste im Profil auftretende Spannung?

Man hat nach Th. II Gl. 56' $\mathfrak{M} = -\frac{ql^2}{12} = -9000 \text{ cmkg}$. Die Neutralaxe $T T$ ist in der Centralellipse conjugirt der verticalen Angriffsrichtung $Y^1 Y^1$, daher durch Parallele zu $T T$ am Profilumfang die Stellen B und F der grössten Spannung erhalten werden, welch' Letztere bei bekanntem Drehsinn von $\mathfrak{M}$ Druck in B und Zug in F ist.

Daher nach Gl. (42') die grösste Druckspannung bei B

$$\beta = \frac{9000}{14 \cdot 0 \cdot E'} = \frac{9000}{14 \cdot 0,91} = 706 \text{ kg per qcm.}$$

und die grösste Zugspannung bei F

$$\alpha = \frac{9000}{14 \cdot 0 \cdot E} = \frac{9000}{14 \cdot 1,9} = 338 \text{ kg per qcm.}$$

Andere Lösung:

Die Hauptaxe $Y Y$ schliesst mit $A F$ nach S. 26 den Winkel $13^\circ 1'$, also mit $Y' Y'$ den Winkel $16^\circ 59'$ ein, daher die Componenten von $\mathfrak{M}$ nach $Y Y$ und $Z Z$:

$$9000 \cos 16^\circ 59' = 8607,51$$

und

$$9000 \sin 16^\circ 59' = 2628,85.$$

Da nach S. 26 die Hauptträgheitsmomente $\Theta_{zz} = 148$

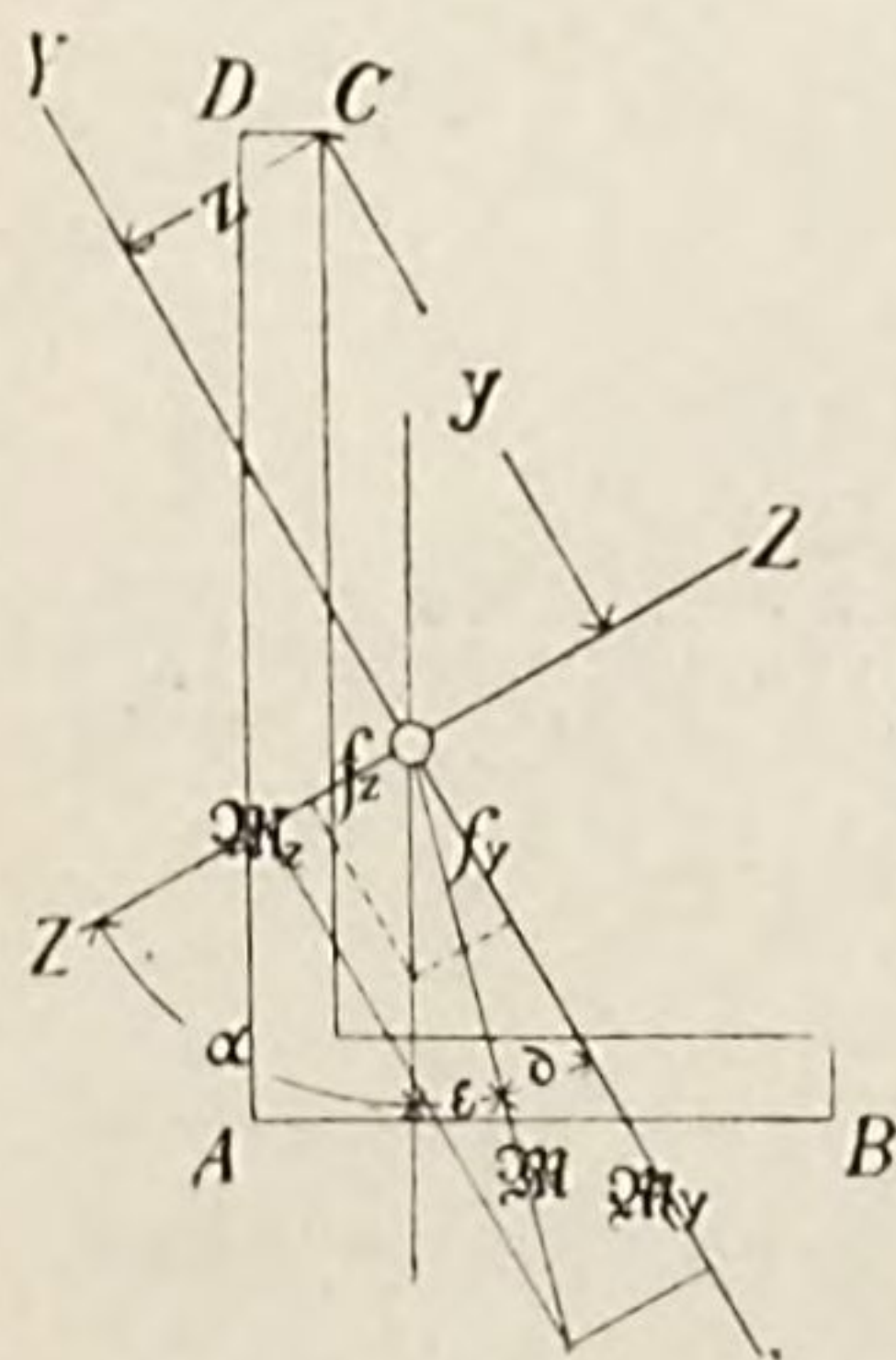
nur $\Theta_{yy} = 17,4$ sind,

$$\text{so findet sich: } \beta = \frac{8607,51 \cdot 4,45}{148} + \frac{2628,85 \cdot 2,96}{17,4} = 706$$

und

$$\alpha = \frac{8607,51 \cdot 6,39}{148} - \frac{2628,85 \cdot 0,25}{17,4} = 337.$$

Fig. 19.



Beispiel 3. Ein Winkeleisen, mit einem Schenkel $A B$ horizontal gelagert (Fig. 19), sei einer Belastung ausgesetzt, deren Ebene, durch den Schwerpunkt des Profils gehend, mit der Y Axe den Winkel δ einschliesst. Die Componenten von $\mathfrak{M}$ nach den Hauptachsen seien $\mathfrak{M}_y$ und $\mathfrak{M}_z$, daher

$$\tan \delta = \frac{\mathfrak{M}_z}{\mathfrak{M}_y}.$$

Soll durch die Belastung eine verticale Ausbiegung entstehen, so muss, wenn f_y und f_z die partiellen Durch-

Die Werthe der Hauptschubspannungen sind:

$$\left. \begin{aligned} \sigma' &= + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \sigma^2} \\ \text{und } \sigma'' &= - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \sigma^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (50)$$

Für die Hauptschubspannungen in den äussersten Fasern erhält man, da $\sigma = 0$:

$$\sigma' = + \frac{\alpha}{2}, (\sigma'') = - \frac{\alpha}{2}.$$

Die Wirkung der beiden Hauptspannungen, von welchen jede in ihrer Richtung eine longitudinale und in der Richtung der anderen eine transversale Längenänderung hervorbringt, lässt sich (nach Winkler) ersetzt denken durch zwei ideelle Hauptspannungen α_1 und α_2 , von welchen jede in ihrer Richtung diejenige Deformation allein bewirkt, welche die Hauptspannungen α' und α'' zusammen hervorrufen.

Bezeichnet μ das Verhältniss der longitudinalen Längenänderung zur transversalen, so sind die ideellen Hauptspannungen gegeben durch:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\mu - 1}{2\mu} \alpha + \frac{\mu + 1}{\mu} \sqrt{\frac{1}{4} \alpha^2 + \sigma^2} \\ \alpha_2 &= \frac{\mu - 1}{2\mu} \alpha - \frac{\mu + 1}{\mu} \sqrt{\frac{1}{4} \alpha^2 + \sigma^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (51)$$

oder, da μ für Metalle etwa $\frac{1}{3}$ beträgt,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{3} \alpha + \frac{4}{3} \sqrt{\frac{1}{4} \alpha^2 + \sigma^2} = \alpha' + \frac{1}{3} (\alpha' - \alpha) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{3} \alpha - \frac{4}{3} \sqrt{\frac{1}{4} \alpha^2 + \sigma^2} = \alpha'' + \frac{1}{3} (\alpha'' - \alpha) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (51')$$

Die ideelle Hauptspannung ist daher um $\frac{1}{3}$ des Unterschiedes zwischen Hauptspannung und Normalspannung des betreffenden Punktes grösser als die eigentliche Hauptspannung.

Für die Dimensionirung ist maassgebend, dass in keinem Punkte die daselbst auftretende ideelle Haupt-Zug- oder Druckspannung die zulässige Beanspruchung überschreite, ferner, dass die Hauptschubspannung unter der Grenze der zulässigen Beanspruchung auf Abscheeren sich erhalte.

In den äussersten Fasern wird $\sigma = 0$, daher $\alpha' = \alpha$ und $\alpha_1 = \alpha'$, d. h. ideelle Hauptspannung und Hauptspannung fallen hier zusammen mit der Normalspannung.

Beispiel. Ein als Unterzug dienender **I** förmiger Träger von 8 m Länge, in der Mitte durch eine Säule unterstützt, habe incl. Eigengewicht eine ruhende Belastung von 2400 kg pro m aufzunehmen. Es werde für den Träger das Profil Nr. 30 (Fig. 4) gewählt, dessen Trägheitsmoment 9888 cm⁴ ist. Der gefährliche Querschnitt befindet sich über der Mittelstütze, und ist hier $V = 6000$ kg und $M = 480000$ cm kg. Die Normal-Spannung in den äussersten Fasern, zugleich Hauptspannung und ideelle Hauptspannung daselbst, ist

$$\alpha = \frac{480000}{9888} 15 = 728 \text{ kg pro qcm,}$$

es ist aber zu untersuchen, ob auch in den übrigen Theilen des Querschnitts den eben erwähnten Bedingungen Genüge geleistet wird. Zu diesem Ende wurden für die Schwerpunktsaxe ($y = 0$), für die Unterkante der Flantschen ($y = 13,38$) und für

die Flantschenoberkante ($y = 15$) die Werthe der Normalspannung, Schubspannung, Hauptspannung und ideellen Hauptspannung berechnet und wie folgt erhalten:

	Normal- spannung α Gl 46	Schub- spannung σ Gl 47	Haupt- spannung α' Gl 48	Ideelle Haupt- spannung α_1 Gl 51'
$y = 0$ (Schwerpunktsaxe)	0	216	216	288
$y = 13,38$ (Flantschenunterkante)	650	161 14	688 650	701 650
$y = 15$ (Flantschenoberkante)	728	0	728	728

An keiner der in Betracht gezogenen Stellen überschreitet die ideelle Hauptspannung die Beanspruchung von 750 *kg* pro *qcm*. Die Werthe der Hauptschubspannung werden nach Gl. 45 bei $y = 0$ $\sigma' = 216$, bei $y = 13,38$ $\sigma' = 363$ und 325, bei $y = 15$ $\sigma' = 364$ erhalten.

II. Abschnitt.

Festigkeit der Schraubenbolzen- und Nietverbindungen.

Schraubenbolzenverbindungen.*)

Sind zwei auf Zug beanspruchte Stäbe durch einen Schraubenbolzen verbunden Fig. 21, so wird Letzterer auf Abscheerung beansprucht. Wenn nun F_1

den mit Rücksicht auf die vorhandene Krafteinwirkung P erforderlichen Stabquerschnitt (die Zugfläche) bezeichnet, so bestimmt sich, da die Scheerfestigkeit gleich $\frac{4}{5}$ der Zugfestigkeit, der Querschnitt F des Bolzens aus:

$$F = \frac{5}{4} F_1, \quad \dots \dots \dots (52)$$

oder, wenn d der Bolzendurchmesser,

$$\frac{d^2 \pi}{4} = \frac{5}{4} F_1$$

d. i.

$$d = 1,261 \sqrt{F_1}. \quad \dots \dots \dots (52')$$

Selbstverständlich muss der Stabquerschnitt auch an der Verbindungsstelle mindestens gleich F_1 sein und ferner auch Sicherheit gegen Abscheeren, d. h. Auschlitten der ringförmigen Stabenden bestehen. In letzterer Beziehung gilt:

$$2 a e \gamma = F_1 a$$

oder

$$2 a e \frac{4}{5} a = F_1 a$$

d. i.

$$e = \frac{5}{8} \frac{F_1}{a} = \frac{5}{8} \frac{a b}{a} = \frac{5}{8} b \quad \dots \dots \dots (53)$$

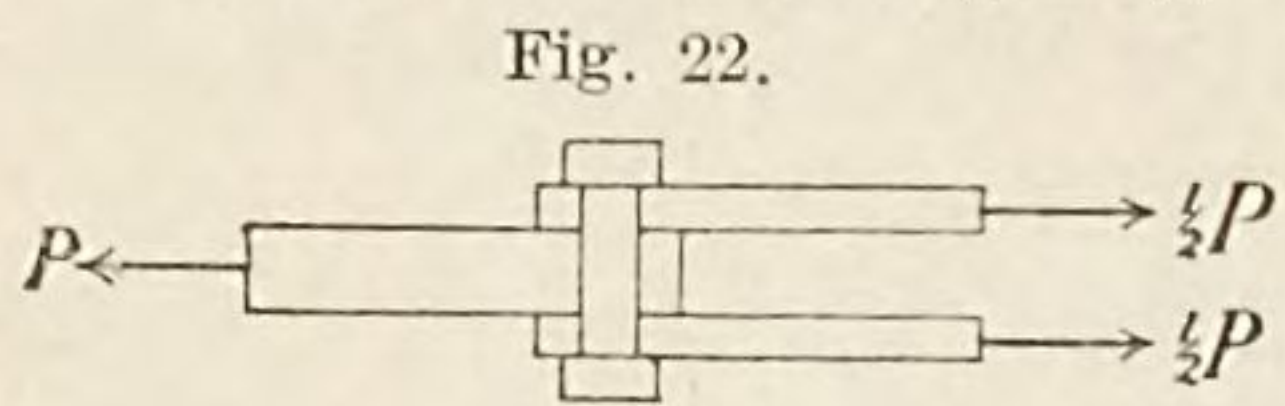
Die Bolzenverbindung Fig. 21 wird einschnittig genannt, indem hier der Bolzen nur nach einer Schnittfläche auf Abscheeren beansprucht wird.

*) Schwedler, Ueber Nietverbindungen, Deutsche Bauzeitung 1867.

Weyrauch, Festigkeit und Dimensionenberechnung der Eisen- und Stahl-Constructionen, Leipzig bei Teubner 1876.

Unwin, Nietverbindungen, übersetzt von Loewe, Wien bei Waldheim 1880.

Bei der Anordnung Fig. 22 wird im Falle des Abscheerens der Bolzen nach zwei Schnittflächen getrennt, wesshalb diese Verbindung doppelschnittig genannt wird.



Hier ist: $2 F = \frac{5}{4} F_1$

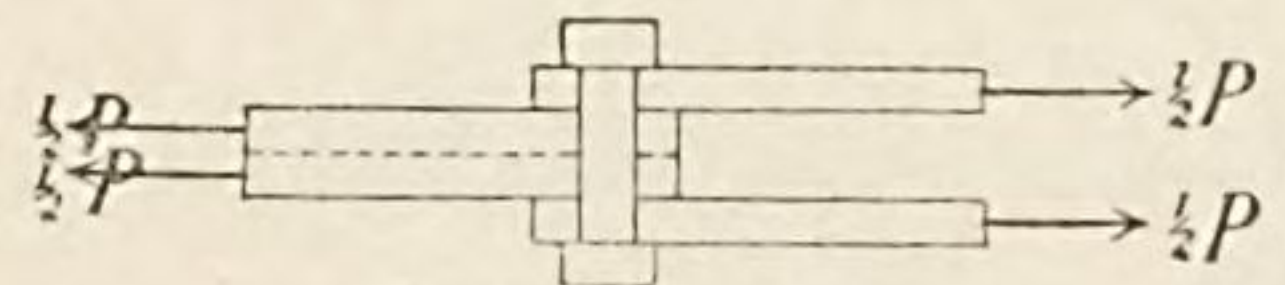


Fig. 23.

oder $F = \frac{5}{4} \frac{F_1}{2}$ d. i. $d = 1,261 \sqrt{\frac{F_1}{2}}$.

Bei ν -schnittiger Verbindung hat man:

$$F = \frac{5}{4} \frac{F_1}{\nu}, \text{ d. i. } d = 1,261 \sqrt{\frac{F_1}{\nu}} \quad (54)$$

Jede ν -schnittige Verbindung kann man sich, wie durch Fig. 23 angedeutet, in ν einschnittige zerlegt denken.

Nietverbindungen.

Gesamt-Querschnitt der Nieten. Die gesammte Querschnittsfläche F der für irgend eine Verbindung von Stäben oder Blechen erforderlichen Nieten ergibt sich analog den Gleichungen 52 und 54

bei einschnittiger Vernietung: $F = \frac{5}{4} F_1$

bei ν -schnittiger Vernietung: $F = \frac{5}{4\nu} F_1$

wobei F_1 den mit Rücksicht auf die vorhandene Beanspruchung erforderlichen Stabquerschnitt bezeichnet.

Zahl der Nieten. Die nöthige Zahl ε der Nieten folgt dann, wenn d der Nietbolzendurchmesser, aus:

$$\varepsilon \frac{d^2 \pi}{4} = F,$$

daher für einschnittige Vernietung: $\varepsilon = \frac{5}{\pi} \frac{F_1}{d^2} = 1,591 \frac{F_1}{d^2} \quad (55)$

und für ν -schnittige Vernietung: $\varepsilon = \frac{5}{\pi} \frac{F}{\nu d^2} = 1,591 \frac{F_1}{\nu d^2} \quad (56)$

Durchmesser der Nietbolzen. Je grösser der Durchmesser d der Nietbolzen gewählt wird, desto mehr Kraft wird auf die Lochwandungen übertragen, desto mehr wächst also die Gefahr des Aufquetschens der Lochränder und des Stauchens der zu verbindenden Bleche. Wird nach den Versuchen von Gerber angenommen, dass die Quadrateinheit der Projection der Lochwandung (auf eine senkrecht zur Längsaxe der verbundenen Stäbe oder Bleche befindliche Ebene) nicht über das Doppelte der Zugbeanspruchung angestrengt werde, so ergibt sich, wenn a die Blechdicke

$$\frac{d^2 \pi}{4} \frac{4}{5} a \leq d a \cdot 2a$$

d. i. $d \leq 3,2a \quad (57)$

(bei mehrschnittiger Verbindung ist a die Blechdicke der einschnittigen Vernietungen, in welche jede ν -schnittige zerlegt werden kann). In der Regel wird $d = 1,5a$ bis höchstens $d = 3a$ angenommen.

Nach Unwin ist annähernd $d \leq 1,9a$ zu setzen.

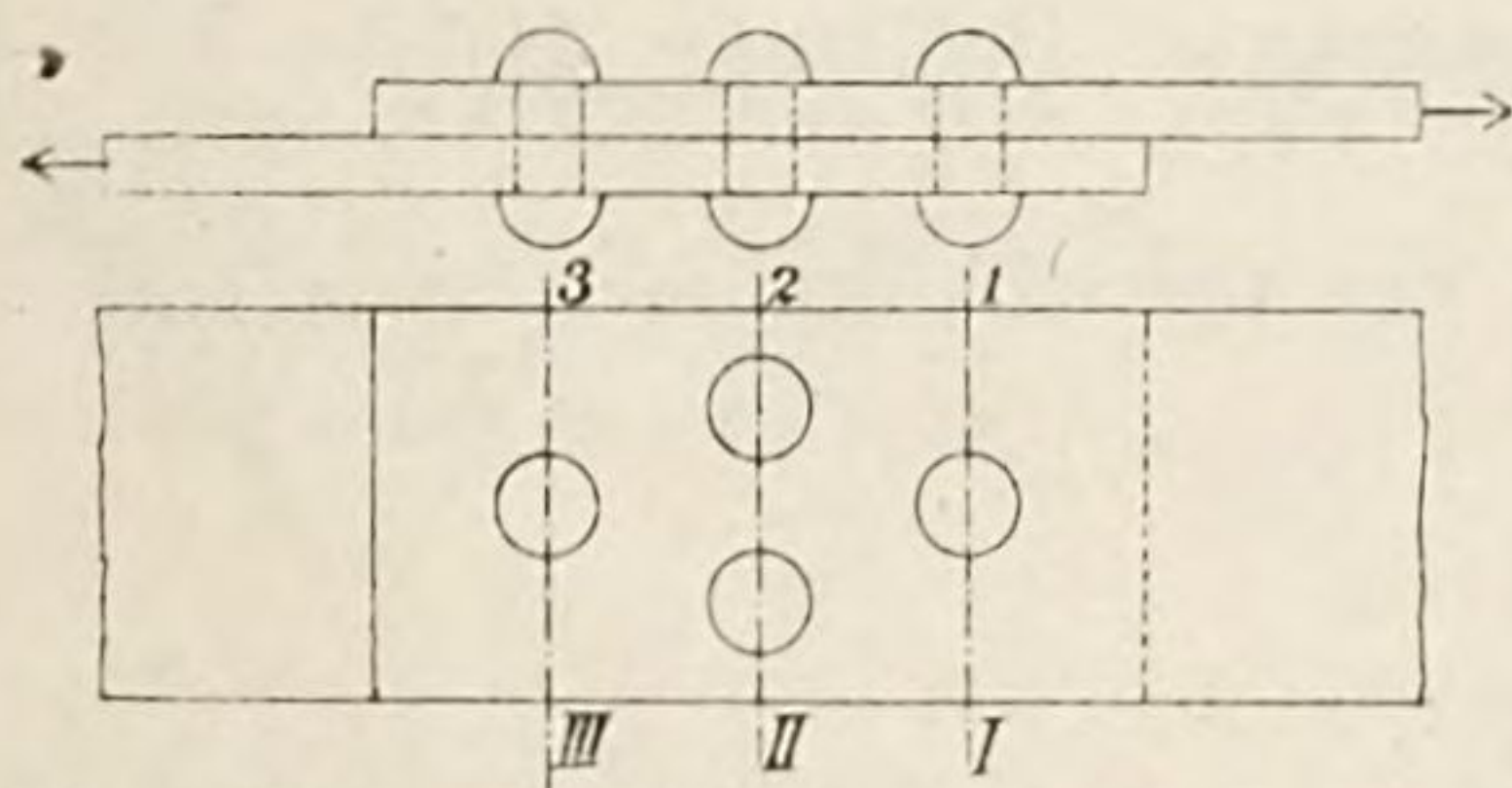
Gruppierung der Nieten bei Stabnietungen. Bei der Vertheilung der Nieten hat man möglichst auf eine symmetrische Anordnung zur Stabaxe Rücksicht zu nehmen.

Die Vernietung wird einfach, doppelt oder ν -fach genannt, je nachdem in der Krafrichtung 1, 2 oder ν Nieten (resp. Nietreihen) aufeinander folgen.

Ist ein Stab mit einem unelastischen Körper mehrfach vernietet, so nimmt nur die nach der Krafrichtung hin gelegene äusserste Niete oder Nietreihe die ganze Kraft auf, während die übrigen wirkungslos bleiben. Es ist daher bei Verbindung von ungleich elastischen Materialien oder auch von solchen Stäben, welche zwar gleiche Elasticität besitzen, aber in Folge ungleicher Stärke oder Befestigungsweise verschieden nachgeben, die einfache Vernietung die zweckmässigste. Bei gleicher Elasticität und Formänderung der verbundenen Stäbe kann nach den hierüber vorhandenen Versuchen angenommen werden, dass, wenn die Vernietung doppelt ist, noch eine gleichmässige Anstrengung der einzelnen Nieten stattfindet. Ist die Vernietung eine drei- oder mehrfache, so tritt eine ungleichmässige Vertheilung der Beanspruchung zu Ungunsten der (nach der Krafrichtung) äussersten Nieten statt.

Als nutzbare Querschnittsfläche eines Stabes ist der Stabquerschnitt nach Abzug der Nietöffnungen im ungünstigsten Schnitt zu betrachten. Bei der Ermittlung des Letzteren hat man nicht allein die Nietlöcher des Querschnitts, sondern auch die

Fig. 24.



auf denselben wirkende Kraft ins Auge zu fassen. So ist beispielsweise in der Verbindung Fig. 24 der Querschnitt 2 II nicht ungünstiger beansprucht als die Querschnitte 1 I und 3 III. Denn, wenn auch Schnitt 2 II zwei Nietöffnungen, also eine um d geringere effective Breite als Schnitt 1 I besitzt, so ist doch auch die auf

2 II wirkende Kraft um denjenigen Theil vermindert, welcher von der Niete des Querschnitts 1 I aufgenommen wurde, so dass für sämtliche Querschnitte nur je eine Nietöffnung als Verschwächung zu rechnen ist und $F_1 = (b - d) a$ als nutzbare Querschnittsfläche gilt.

Mit Rücksicht hierauf sollte die Anzahl der Nieten in zwei aufeinander folgenden Reihen nie um mehr wachsen als die Anzahl der Nieten in der äussersten Reihe beträgt. In Letzterer werden alsdann zweckmässig möglichst wenig Nieten angeordnet.

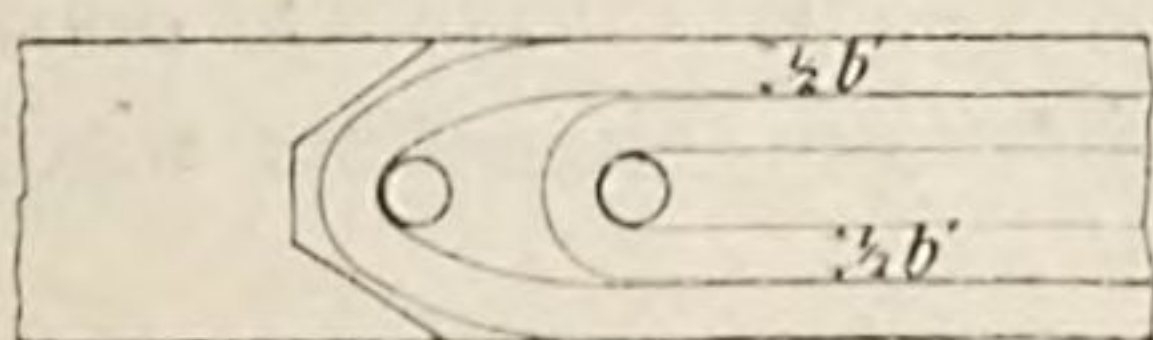
Unter der Voraussetzung, dass die Kraftvertheilung über die einzelnen Nietquerschnitte eine gleichmässige ist, kann angenommen werden, dass auf jede Niete die Beanspruchung eines Stabstreifens wirke, dessen Breite b' bestimmt ist durch:

$$\frac{d^2 \pi}{4} \cdot \frac{4}{5} a = b' a a$$

$$\text{d. i.} \quad b' = \frac{\pi}{5} \frac{d^2}{a} = 0,628 \frac{d^2}{a}, \quad \dots \quad (58)$$

wenn d Nietdurchmesser und a Blechdicke bezeichnen.

Fig. 25.



Man kann sich nun vorstellen, der Stab sei in Stränge von der Breite $\frac{1}{2}b'$ zerlegt, welche sich in der aus den Figuren 25 und 26 ersichtlichen Weise um die einzelnen Nieten schlingen. Es wird hiedurch die Beurtheilung über die Zweck-

III. Abschnitt.

Decken und Stützen.

§ 1.

Blehbalkenträger.

Der zusammengesetzte **I** förmige Tragbalken oder Blehträger besteht aus dem verticalen Wandblech, den oben und unten beiderseits angebrachten Winkleisen und den Flacheisen oder Gurtungsblechen, welche Theile durch Vernietung zu einem Ganzen verbunden sind.

Die Trägerhöhe wird so gewählt, dass bei gleicher Widerstandsfähigkeit der Materialaufwand möglichst klein ausfällt.*) Das günstigste Verhältniss zwischen Trägerhöhe h und Stützweite l beträgt für Trägerlängen bis zu 10 m $h : l = 1 : 7$, für grössere Spannweiten: $h : l = 1 : 10$ bis $1 : 11$.

Das Trägheitsmoment des vollen Blehträgerquerschnitts Fig. 33 ist:

$$\Theta = \frac{1}{12} [b h^3 - (b - b_1) h_1^3 - (b_1 - b_2) h_2^3 - (b_2 - a) h_3^3] \quad . \quad (65)$$

durch die Nietöffnungen tritt indessen eine Verschwächung des Profils ein, und

*) Denkt man den Schwerpunkt der Gurtungen an den Enden der Mittelrippe befindlich und bezeichnet man die Höhe derselben mit h_0 , ihre Stärke mit a und die Fläche des gesammten Trägerquerschnitts mit F , so ist annähernd:

$$\Theta = \frac{a h_0^3}{12} + 2 \cdot \frac{1}{2} (F - a h_0) \frac{h_0^2}{4} = \frac{h_0^2}{4} (F - \frac{2}{3} a h_0),$$

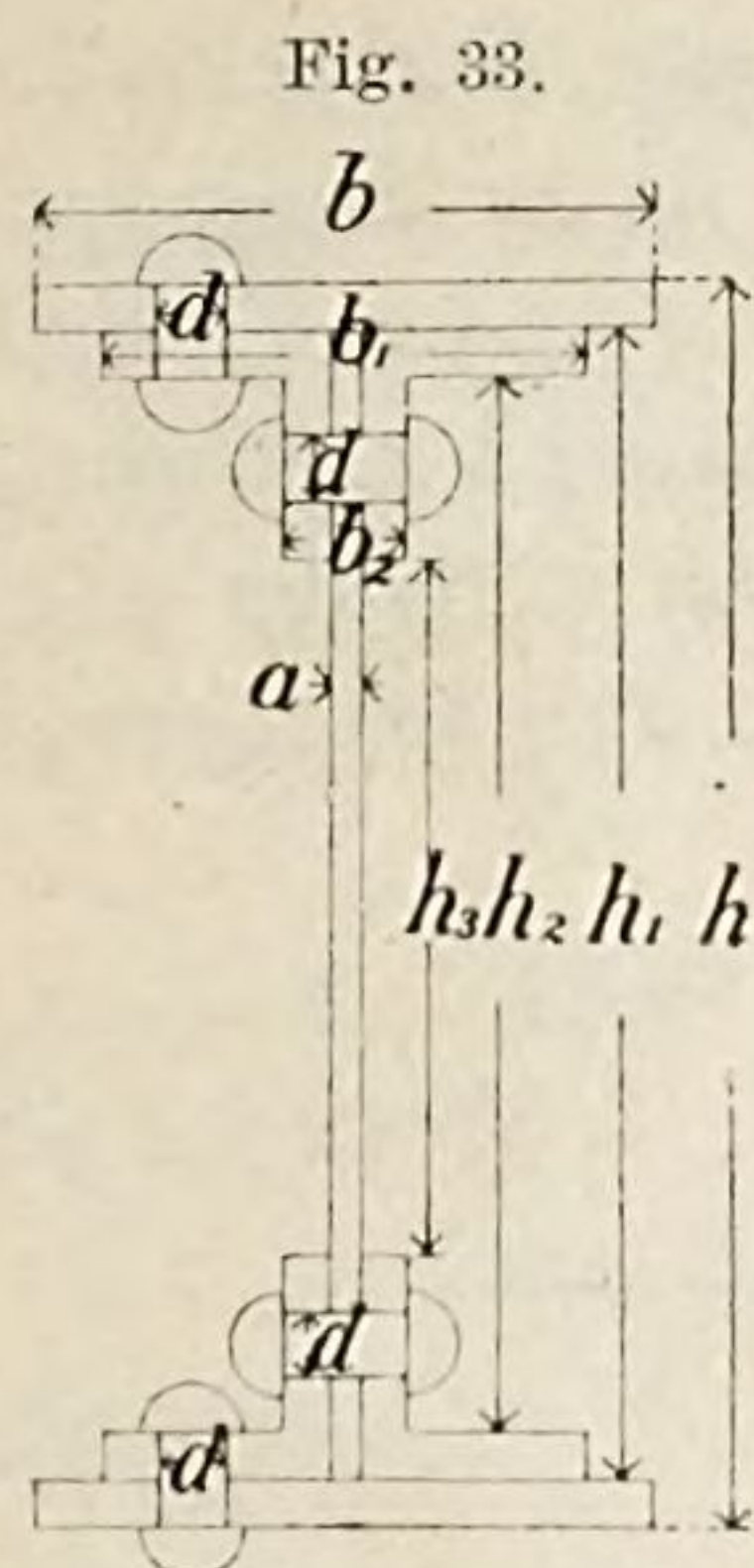
daher
$$\mathfrak{M} = a \frac{h_0}{2} (F - \frac{2}{3} a h_0)$$

oder
$$F = \frac{2 \mathfrak{M}}{a h_0} + \frac{2}{3} a h_0.$$

Bei gegebenem $\mathfrak{M}$ wird F ein Minimum, wenn

$$\frac{d F}{d h_0} = - \frac{2 \mathfrak{M}}{a h_0^2} + \frac{2}{3} a = 0,$$

d. h., wenn
$$h_0 = \sqrt{\frac{3 \mathfrak{M}}{a a}}.$$



man kann, was die Gurtungen anlangt, in der Regel annehmen, dass diese Verminderung durch zwei in jeder derselben befindliche Niete, sowie in Fig. 33 angegeben, bewirkt wird.

Die Verschwächung, die das Wandblech an den Stößen erfährt, wird berücksichtigt, indem man das Trägheitsmoment desselben um ca. den vierten Theil verringert. So ergibt sich bei einem Nietlochdurchmesser d das Trägheitsmoment der nutzbaren Querschnittsfläche:

$$\Theta^1 = \Theta - d(h - h_2) \left(\frac{h + h_2}{4} \right)^2 - 2b_2 d \left(\frac{h_2 + h_3}{4} \right)^2 - \frac{1}{48} a h_3^3 \quad (66)$$

Handelt es sich darum, das Trägheitsmoment des Blechwandträgers rasch, wenn auch nur approximativ zu erhalten, so bedient man sich der Näherungsformel:

$$\Theta = 2F_1 \frac{h_0^2}{4} + \frac{1}{12} a h_0^3$$

oder

$$\Theta = \frac{h_0^2}{2} (F_1 + \frac{1}{6} a h_0), \quad (67)$$

wo F_1 den Querschnitt einer Gurtung (excl. Stegfläche), h_0 den Abstand der Gurtungsschwerpunkte, a die Stegdicke bezeichnen und angenommen wird, dass die Gurtungsschwerpunkte in die obere Begrenzung der Blechwand fallen.

Aus Gl. 67 folgt auch, da $\frac{\Theta}{\frac{1}{2} h_0} = \mathfrak{M}$, $F_1 = \frac{\mathfrak{M}}{a h_0} - \frac{1}{6} a h_0 \quad (68)$

oder, wenn nach Gerber's Dimensionierungsmethode $\frac{\Theta}{\frac{1}{2} h_0} = \mathfrak{M}_p + 1,5 \tau \mathfrak{M}_q$ gesetzt wird:

$$F_1 = \left(\frac{\mathfrak{M}_p + 1,5 \tau \mathfrak{M}_q}{1600 h_0} \right) - \frac{1}{6} a h_0 \quad (68^1)$$

Blechwandstärke. Die Normalspannungen sind am grössten in den äussersten Fasern, die Schubspannungen in der Neutralaxe. Es ist deshalb die Blechwand zunächst auf Festigkeit gegen Abscheeren zu untersuchen, indem die in der Neutralaxe des betrachteten Querschnitts pro Längeneinheit auftretende Schubspannung

$$\sigma = \frac{\int_0^{\frac{h}{2}} d F y}{\Theta a} \quad (47^1)$$

den Festigkeitscoefficienten γ der Scheerfestigkeit nicht überschreiten darf.

Da

$$\frac{\int_0^{\frac{h}{2}} d F y}{\Theta} = \frac{1}{h_0} \quad (h_0 = \text{Entfernung der Gurtungsschwerpunkte}),$$

so ist

$$a = \frac{V}{\gamma h_0} \quad (69)$$

Beim **I**förmigen- und beim Blechträger-Querschnitt ist nun, wie aus Gl. 47 hervorgeht, die Vertheilung der horizontalen und verticalen Schubspannungen in der Richtung von $y = 0$ bis $y = +\frac{1}{2}h$ oder $y = -\frac{1}{2}h$ über den Querschnitt eine solche, dass eine wesentliche Verminderung des Maximalwerthes von σ nicht eintritt.

bis zu derjenigen Stelle, wo gegen das Ende der Mittelrippe eine Verbreiterung des Querschnitts durch die horizontalen Rippen stattfindet. An dieser Stelle kann daher nahezu von einem Zusammenfallen der Maximalwerthe von σ und α die Rede sein. Findet dies statt, so treten bei geringer Stegdicke verhältnissmässig beträchtliche ideelle Hauptspannungen und Hauptschubspannungen auf und ist für vorläufig angenommene Dimensionen ähnlich wie S. 42 zu untersuchen, ob den dort angegebenen Bedingungen entsprochen wird.

Mit Rücksicht hierauf ist es auch gebräuchlich, in der Gl. 69 anstatt des gewöhnlichen Schubfestigkeitscoefficienten den verringerten Werth $\gamma = 350 \text{ kg per } qcm$ einzuführen,*) so dass sich hienach die Wandblechstärke berechnet aus:

$$a = \frac{V}{350 h_0} \dots \dots \dots (69^1)$$

Beispiel. Ein continuirlicher Blechträger von zwei Oeffnungen à 8 m Stützweite habe eine ständige Last $p = 1000 \text{ kg per } m$ und eine variable Last $q = 6050 \text{ kg per } m$ aufzunehmen.

Wenn $h_1 = \frac{1}{10} l = \frac{1}{10} \cdot 8 = 0,8 \text{ m}$ angenommen wird, so hat man, da (ständige und bewegliche Last zusammengekommen) V_{max} unmittelbar vor und nach der Mittelstütze $= 35250 \text{ kg}$ ist, als Blechwandstärke:

$$a = \frac{35250}{350 \cdot 80} = 1,3 \text{ cm.}$$

Hienach folgt, da M_{max} der Gesamtbelastung über der Mittelstütze $= 56400 \text{ m kg}$, nach Gl. 68 als Gurtungsquerschnitt:

$$F_1 = \frac{5640000}{750 \cdot 80} = \frac{1}{6} 1,3 \cdot 80 = 77 \text{ } qcm.$$

Nach der neueren Berechnungsweise erhält man, da für die Mittelstütze $M_v = 8000 \text{ m kg}$ und $M_q = 48400 \text{ m kg}$,

$$\varphi = \frac{M_v}{1,5 M_q} = 0,11$$

und nach Tabelle S. 9 $\sigma = 1,72$, daher $\tau = \sigma - \varphi = 1,61$.

Mithin $M_v + 1,5 \tau M_q = 12488600 \text{ cm kg}$

und $F_1 = \frac{12488600}{1600 \cdot 80} = \frac{1}{6} 1,3 \cdot 80 = 80 \text{ } qcm.$

Nach Schäffer ist.

$$\frac{\alpha_a}{\alpha} = \frac{1,5 M_q \text{ max}}{M_v + 1,5 M_q \text{ max}} = 0,9 \text{ daher nach der Tabelle S. 11 } \alpha = 1033.$$

Hieraus folgt nach Gl. 68¹ $F_1 = \frac{M_v + 1,5 M_q \text{ max}}{1033 \cdot 80} = \frac{1}{6} 1,3 \cdot 80 = 80 \text{ } qcm.$

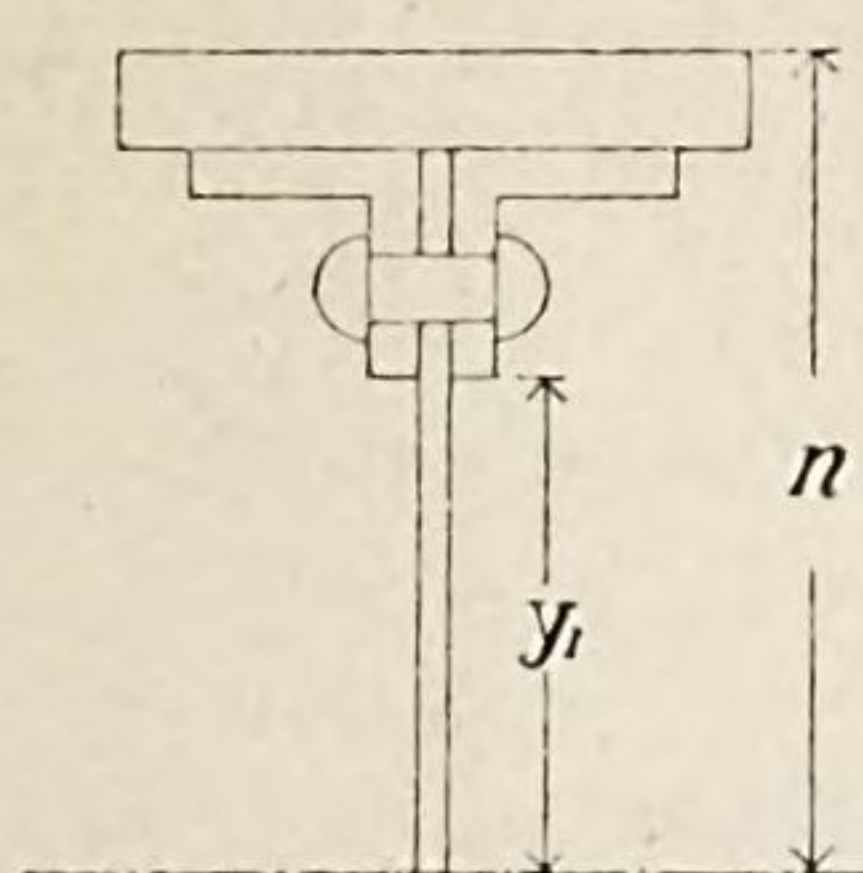
*) Dieser empirische Werth entstand ursprünglich aus der Bedingung, dass, wenn in Gl. 48 $\alpha = \sigma$ gesetzt wird, die Hauptspannung α' nicht grösser werden solle als $600 \text{ kg pro } qcm$, so dass

$$600 = \frac{\sigma}{2} (1 + \sqrt{5})$$

oder

$$\sigma = 370 \text{ kg pro } qcm.$$

Entfernung der Niete. Die in den Gurtungen befindlichen Niete mit Bolzen senkrecht zum Steg Fig. 34 dienen ausschliesslich zur festen Verbindung zwischen Blechwand und Gurtung. Die Schubkraft, welche die



Gurtung gegen die Blechwand zu verschieben sucht, ist pro Längeneinheit des Trägers:

$$S_{x_1} = \frac{V_x}{\Theta} \int_{y_1}^n y \, dF,$$

und wenn e_1 die Entfernung der Niete bezeichnet, so ist $e_1 S_{y_1}$ die auf je eine Niete wirkende Schubkraft, daher, weil die Niete doppelschnittig sind,

$$2 \frac{d^2 \pi}{4} \cdot \frac{4}{5} \alpha = e_1 \frac{V_x}{\Theta} \int_{y_1}^u y dF.$$

Von $y = 0$ bis $y = y_1$ nimmt die horizontale Schubkraft nur wenig ab, so dass man der Schubkraft in der Entfernung y_1 diejenige der Neutralaxe substituieren kann. Dadurch ergibt sich:

[illegible]

woraus e_1 berechnet werden kann.

Es ist indessen bei der verhältnissmässig geringen Stärke der Blechwand auch zu berücksichtigen, dass der Druck auf die Lochwandung nicht zu gross wird. In dieser Richtung muss nach S. 44 die Bedingung erfüllt werden, dass

$$2 \frac{d^2 \pi}{4} \frac{4}{5} a = d a . 2 a,$$

daher

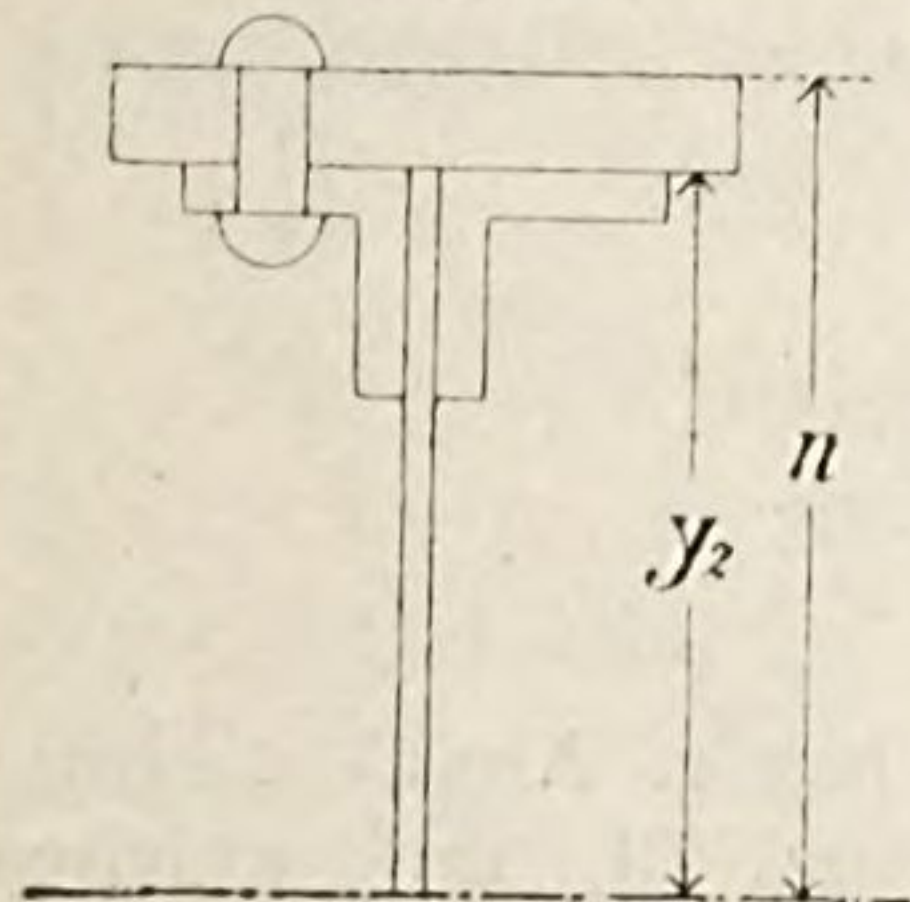
$$e_1 \frac{V_x}{h_0} = d a 2 u$$

oder

$$e_1 = 2 d a h_0 \frac{a}{V_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

Die Nieten mit Bolzen parallel zum Steg, welche die Gurtungsplatten mit den Winkeln verbinden (Fig. 35) werden durch die horizontale Schubkraft

Fig. 35.



auf Abscheerung beansprucht, und da diese Niete einschnittig sind, so berechnet sich ihre Entfernung e_2 aus:

$$S_{y_2} = \frac{V_x}{\Theta} \int_{y_2}^n y \, dF$$

$$\frac{d^2\pi}{4} \cdot \frac{4}{5} a = e_2 S_{y_2}$$

$$\frac{d^2\pi}{4} \cdot \frac{4}{5} \alpha = e_2 S_{y_2}$$

oder

$$e_2 = 0,628 \frac{d^2 a}{S_{y_2}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (72)$$

§ 2.

Säulen.

Zur Berechnung des Querschnitts von Säulen dient die Th. II S. 10 bis 12 nebst ihren Modificationen angegebene Knickungs-Formel:

$$P = \frac{F \cdot \beta}{1 + \nu \frac{Fl^2}{\Theta}} \quad (73)$$

in welcher P die axiale Belastung,

F den Stabquerschnitt,

Θ das Trägheitsmoment desselben,

l die freie Knickungslänge,

β den Coefficienten der einfachen Druckfestigkeit,

und ν den Knickungscoefficienten bezeichnen.

Für Schmiedeisen ist $\nu = 0,00008$

für Gusseisen $\nu = 0,00025$ zu setzen.

Diese zuerst von Schwarz empirisch aufgestellte, später wissenschaftlich begründete Formel (Vgl. Th. II S. 10) ist besonders durch das bekannte Buch „der Bau der Brückenträger von Laissle und Schübler“ allgemeiner bekannt geworden. Sie empfiehlt sich wegen der brauchbaren Resultate, die sie liefert, für die Anwendung, wie sie denn auch in den Kreisen der Praxis die weiteste Verbreitung gefunden hat. Da die unbekannten Querschnittsmaasse verwickelt in F und Θ vorkommen, so ist es, soll nicht die Anwendung der Formel auf ein Probirverfahren beschränkt sein, erforderlich, dass man das gegenseitige Verhältniss der Querschnittsdimensionen kennt, wodurch alle Unbekannten auf eine Einzige reducirt werden. *)

Beispiele.

1. Ein frei aufgestellter, 4 m langer schmiedeiserner Stab hat eine axiale Belastung von 30000 kg aufzunehmen. Es sind die Dimensionen des kreuzförmigen Querschnitts Fig. 36 zu bestimmen, wenn $\beta = 750$ kg pro qcm und $d = \frac{1}{10} b$.

Nach Gl. 73 ist,

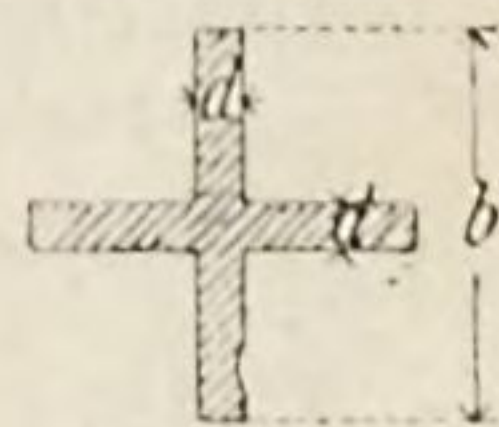
$$\text{da } F = 0,19 b^2,$$

$$\Theta = 0,0084 b^4$$

und für Schmiedeisen $\nu = 0,00008$,

$$30\,000 = \frac{0,19 b^2 \cdot 750}{1 + 0,00008 \frac{0,19 b^2 \cdot 160\,000}{0,0084 b^4}}$$

Fig. 36.



*) Zu demselben Ziel führt die von Asimont (Zeitsch. d. bayer. Arch.- u. Ing.-Vereins 1876 — 77 S. 120) vorgeschlagene Umgestaltung der Formel 73, auf welches Verfahren hier besonders aufmerksam gemacht sei:

$$\text{Man setze} \quad 1 + \nu \frac{Fl^2}{\Theta} = \varphi_1, \quad (A)$$

so schreibt sich Gl. 73: $P = F \frac{\beta}{\varphi_1}$.

Bezeichnet nun F' die bei gleicher Kraftwirkung P der reinen Druckfestigkeit entsprechende Querschnittsfläche (auch Zug-Querschnittsfläche, wenn die Zugfestigkeit gleich der Druckfestigkeit), so ist

$$P = F' \cdot \beta$$

und durch Division beider Gleichungen: $\varphi_1 = \frac{F}{F'}$

Sind die Profile F und F' einander ähnlich, so verhalten sich die Flächen wie die Quadrate der zugehörigen Trägheitsradien:

$$\frac{F}{F'} = \frac{b^2}{b_1^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Hieraus folgt: } b^4 - 210,5 b^2 &= 60947,3 \\ \text{oder wenn man } b^2 &= x \text{ setzt,} \\ x^2 - 210,5 x &= 60947,3 \\ \text{daher } x &= 373,62 \\ \text{und } b &= 19,3 \text{ cm} \\ d &= 1,93 \text{ cm} \end{aligned}$$

Nach Asimont's Verfahren ist

$$F' = \frac{30000}{750} = 40 \text{ qcm}$$

und nach untenstehender Tabelle $\xi = 0,233$,

$$\text{daher nach Gl. C } \varphi_1 = 0,5 + \sqrt{\frac{0,00008 \cdot 160\,000}{0,233 \cdot 40} + 0,25} = 1,7741$$

folglich $F = 1,7741 \cdot 40 = 70,964 \text{ qcm}$

$$\text{und } b = \sqrt{\frac{70,964}{0,19}} = 19,3$$

$d = 1,93$.

Zur Erleichterung der Berechnung von F aus Formel 73 kann die nachfolgende Tabelle benützt werden, welche für eine Anzahl häufig vorkommender Querschnittsformen und für verschiedene Verhältnisse der freien Knickungslänge l zur kleinsten Querschnittsbreite b die Werthe $\varphi_1 = 1 + 0,00008 \frac{Fl^2}{\Theta}$ gibt.

$$\text{oder } \varphi_1 = \frac{b^2}{b_1^2} \quad \text{d. i. } b^2 = \varphi_1 b_1^2.$$

$$\text{Da } b^2 = \frac{\Theta}{F}, \text{ so ist } \frac{F}{\Theta} = \frac{1}{\varphi_1 b_1^2}.$$

Setzt man nun $b_1^2 = \xi F'$, ... (B)
wo ξ , wie leicht einzusehen, für alle ähnliche Querschnittsfiguren eine constante Zahl ist,

$$\text{so erhält man } \frac{F}{\Theta} = \frac{1}{\varphi_1 \xi F'},$$

und wenn dies in Gl. (A) eingeführt wird,

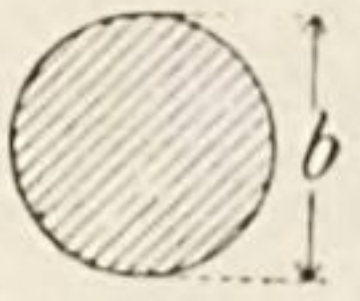
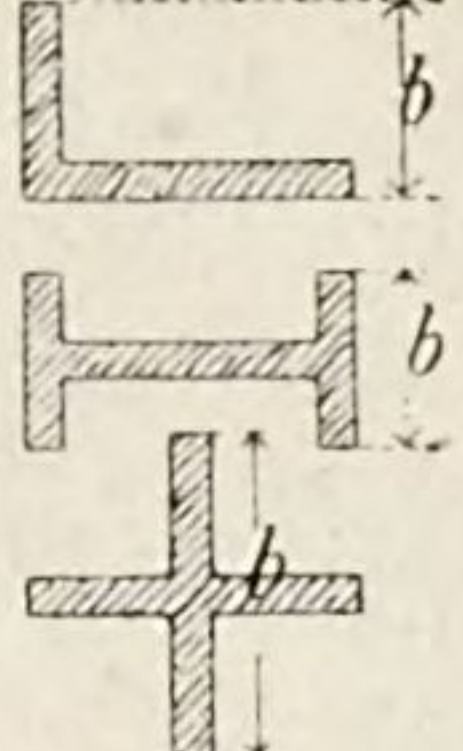
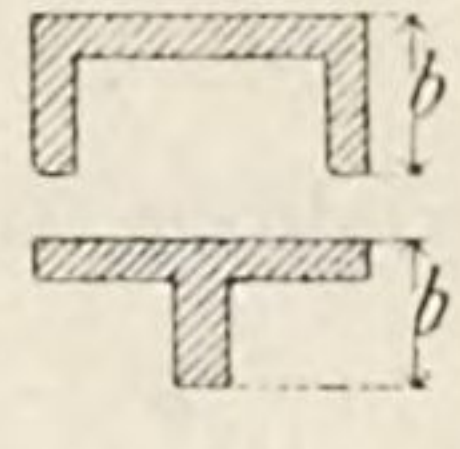
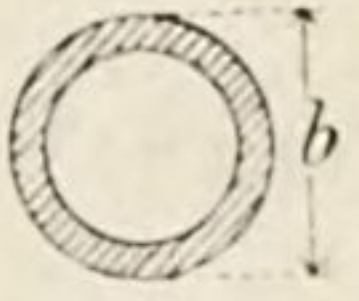
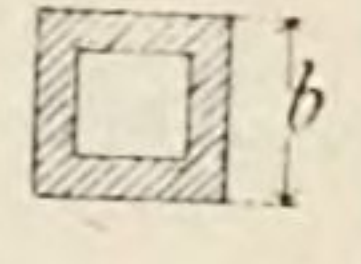
$$\varphi_1 = 0,5 + \sqrt{\frac{l^2}{\xi F'} + 0,25} \quad \text{. (C)}$$

Die rechte Gleichungsseite enthält ausser ξ nur bekannte Grössen; der Werth von ξ aber kann für jede Gruppe ähnlicher Profilformen ein und für allemal aus Gl. B welche identisch ist mit:

$$\xi = \frac{\Theta'}{F'^2}$$

leicht bestimmt werden. Es folgen die Werthe von ξ für einige Profile.

	Quadrat	Kreis	Ringförmiger Querschnitt b Breite, d Wanddicke				Kreuzförmiger Querschnitt b Breite, d Rippendicke			
			$d = \frac{b}{10}$	$d = \frac{b}{20}$	$d = \frac{b}{30}$	$d = \frac{b}{40}$	$d = \frac{b}{5}$	$d = \frac{b}{10}$	$d = \frac{b}{15}$	$d = \frac{b}{20}$
ξ	0,083	0,080	0,363	0,758	1,156	1,552	0,133	0,233	0,336	0,440

$\frac{l}{b}$	$\varphi_1 = 1 + 0,00008 \frac{Fl^2}{\Theta}$					
						
3	1,01	1,01	1,02	1,01	1,01	1,01
6	1,06	1,04	1,09	1,03	1,03	1,02
8	1,10	1,08	1,15	1,06	1,05	1,04
10	1,16	1,12	1,24	1,10	1,08	1,06
12	1,23	1,17	1,35	1,14	1,12	1,09
14	1,31	1,24	1,47	1,19	1,16	1,12
16	1,41	1,31	1,61	1,24	1,20	1,15
18	1,52	1,39	1,78	1,31	1,26	1,19
20	1,64	1,48	1,96	1,38	1,32	1,24
22	1,77	1,58	2,16	1,46	1,39	1,29
24	1,92	1,69	2,38	1,54	1,46	1,35
26	2,08	1,81	2,62	1,65	1,54	1,41
28	2,25	1,94	2,88	1,75	1,63	1,47
30	2,44	2,08	3,16	1,86	1,72	1,54
32	2,64	2,23	3,46	1,98	1,82	1,61
34	2,85	2,39	3,77	2,11	1,92	1,69
36	3,07	2,56	4,11	2,24	2,04	1,78
38	3,31	2,73	4,47	2,39	2,16	1,87
40	3,6	2,9	4,8	2,54	2,3	2,0
42	3,8	3,1	5,2	2,7	2,4	2,1
44	4,1	3,3	5,6	2,9	2,6	2,2
46	4,4	3,5	6,1	3,0	2,7	2,3
48	4,7	3,8	6,5	3,2	2,8	2,4
50	5,0	4,0	7,0	3,4	3,0	2,5
55	5,8	4,6	8,3	3,9	3,4	2,9
60	6,8	5,3	9,6	4,5	3,9	3,2
65	7,8	6,1	11,1	5,1	4,4	3,5
70	8,8	6,9	12,8	5,7	4,9	4,0
75	10,0	7,8	14,5	6,4	5,5	4,4
80	11,2	8,7	16,4	7,1	6,1	4,8
90	14,0	10,7	20,4	8,8	7,5	5,9
100	17,0	13,0	25,0	10,6	9,0	7,0

Wirkt die Belastung nicht ständig, sondern nur zeitweise, so berechnet sich der Querschnitt nach der neueren Dimensionierungsmethode wie folgt:

Bei $P_p = 0$ und $P_q = 30000$ ist $\varphi = 0$ und $\sigma = 1,6514$, daher der reinen Druckfestigkeit (ohne seitliche Ausbiegung) entsprechende Querschnitt F' :

$$\begin{aligned} F' &= 1,5 \sigma \frac{P_q}{1600} \\ &= 1,5 \cdot 1,6514 \frac{30000}{1600} = 46,4. \end{aligned}$$

Nach Gl. 73 ist nun die für gleiche Belastung, aber mit Rücksicht auf Knickfestigkeit erforderliche Querschnittsfläche

$$\begin{aligned} F &= F' \left(1 + \nu \frac{Fl^2}{\Theta} \right) \\ &= 46,4 \left(1 + 0,00008 \frac{F \cdot 400^2}{\Theta} \right) \\ \text{oder, da } F &= 0,19 b^2 \text{ und } \Theta = 0,0084 b^4, \\ 0,19 b^2 &= 46,4 \left(1 + 0,00008 \frac{0,19 b^2 \cdot 160000}{0,0084 b^4} \right) \\ b^4 - 244 b^2 &= 70699, \\ \text{daher } b &= 20,3 \text{ cm} \\ \text{und } d &= 2,03 \text{ cm.} \end{aligned}$$

2. Eine frei aufgestellte 3 m lange, gusseiserne Rundsäule hat eine Last von 120000 kg zu tragen. Es ist der äussere Durchmesser d des Querschnitts Fig. 37 zu bestimmen, wenn die Wandstärke $e = \frac{1}{10} d$.

Fig. 37. Man hat, da $F = 0,2827 d^2$
 $\Theta = 0,02898 d^4$
 $\beta = 500,$
 $120000 = \frac{0,2827 d^2 \cdot 500}{1 + 0,00025 \cdot \frac{0,2827 d^2 \cdot 90000}{0,02898 d^4}}$

oder $d^4 - 849 d^2 = 186329,$
 hieraus $d = 32 \text{ cm}$
 und $e = 0,32 \text{ cm}.$

Nach A sim o n t hat man:

$$F' = \frac{120000}{500} = 240 \text{ qcm}$$

und nach Tabelle S. 53 $\xi = 0,363.$

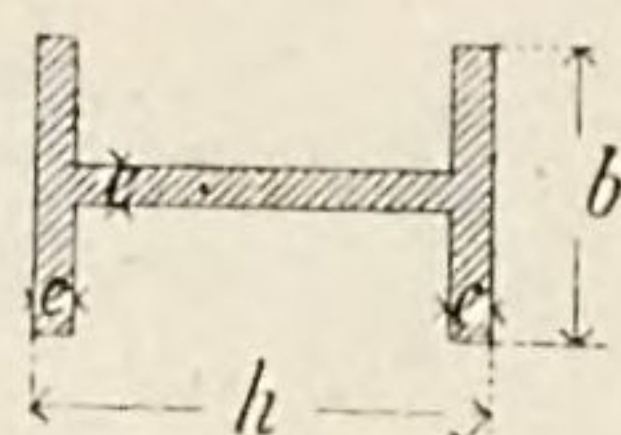
$$\text{Daher } \varphi_1 = 0,5 + \sqrt{\frac{0,00025 \cdot 90000}{0,363 \cdot 240}} + 0,25 = 1,213.$$

$$\text{Folglich } F = 1,213 \cdot 240 = 291,12 \text{ qcm}$$

$$\begin{aligned} \text{Hieraus ergibt sich } d &= \sqrt{\frac{291,12}{0,2827}} = 32 \text{ cm} \\ \text{und } e &= 0,32 \text{ cm,} \end{aligned}$$

3. Eine frei aufgestellte, 5 m lange gusseiserne Säule von I -förmigem Querschnitt Fig. 38 ist durch 90000 kg belastet. Es ist die Länge h des Querschnitts zu bestimmen, wenn die Breite b desselben gleich $\frac{h}{2}$ und die Rippenstärke $e = \frac{h}{12}$.

Fig. 38.



Bei $b = \frac{h}{2}$ und $e = \frac{h}{12}$ ist $F = 0,153 h^2$

und $\Theta = 0,0017763 h^4$,

$$\text{daher } 90000 = \frac{0,153 h^2 \cdot 500}{1 + 0,00025 \frac{0,153 h^2 \cdot 250000}{0,0017763 h^4}}$$

$$\text{oder} \quad 90000 = \frac{76,5 h^4}{h^2 + 5383,3}$$

$$\text{Hieraus: } h^4 - 1176 h^2 = 6333294$$

$$\text{daher} \quad h = 56 \text{ cm}$$

$$\text{somit} \quad b = 28 \text{ cm und } e = 4,6 \text{ cm.}$$

Nach Asimont wird die Berechnung wie folgt durchgeführt:

$$F' = \frac{90000}{500} = 180 \text{ qcm.}$$

$$\text{Da } \xi = \frac{\Theta'}{F'^2} = \frac{0,0017763}{0,153^2} = 0,07588,$$

$$\text{so hat man } \varphi_1 = 0,5 + \sqrt{\frac{0,00025 \cdot 250000}{0,07588 \cdot 180} + 0,25} = 2,6965,$$

$$\text{daher } F = 2,6965 \times 180 = 485,37$$

$$\text{und} \quad h = \sqrt{\frac{485,37}{0,153}} = 56 \text{ cm}$$

$$b = 28 \text{ cm}$$

$$e = 4,6 \text{ cm.}$$

Aus den angeführten Beispielen ist ersichtlich, dass durch das Asimont'sche Verfahren, wenn nur die ξ Werthe der einzelnen zur Verwendung kommenden Profilgruppen bestimmt sind, eine wesentliche Vereinfachung der Rechnung gewonnen ist.

4. Ein Raum von 10 m Länge und 8 m Breite ist durch Kappengewölbe von 4 m Spannweite, 0,6 m Pfeil und 0,25 m Stärke überwölbt (Fig. 39 und 40), welchen die Umfassungsmauern a, b, c, d und der I -förmige Träger E als Widerlager dienen. Ueber den Kappen befinden sich Lagerräume, für welche eine grösste zufällige Belastung von 600 kg vorzusehen ist. Der Träger E ist in der Mitte durch eine 4,0 m hohe schmiedeiserne Säule unterstützt und bildet hier das gemeinschaftliche Auflager zweier 0,75 m starker Gurtbögen, welche eine 0,5 m starke, bis zur folgenden Etage reichende Mauer tragen. Auf dieser Mauer liegen die Balken der Zwischendecke (halber Fehlboden) des oberen Raumes, welche einer grössten zufälligen Belastung von 260 kg per qm ausgesetzt ist.

Balkenlage. Zufällige Last: 260 *kg per qm*
 Eigengewicht der Decke: $\frac{305}{565}$ „ „ „
 zusammen: 565 „ „ „

Bei 0,7 *m* Entfernung der Balken trifft auf jeden eine gleichmässig vertheilte Last $q = 395,5 \text{ kg per } m$, daher sich bei $\beta = 40 \text{ kg per } qcm$, $b = \frac{5}{7}h$ und wenn die Balken als einfache frei aufliegende Träger angeordnet werden, deren Querschnitt nach Th. II S. 60 berechnet aus: $40 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{7}h^3 = \frac{3,955 \cdot 500^2}{8}$
 oder $h = 29,6 \text{ cm}$, $b = 21,1 \text{ cm}$.

Fig. 39.

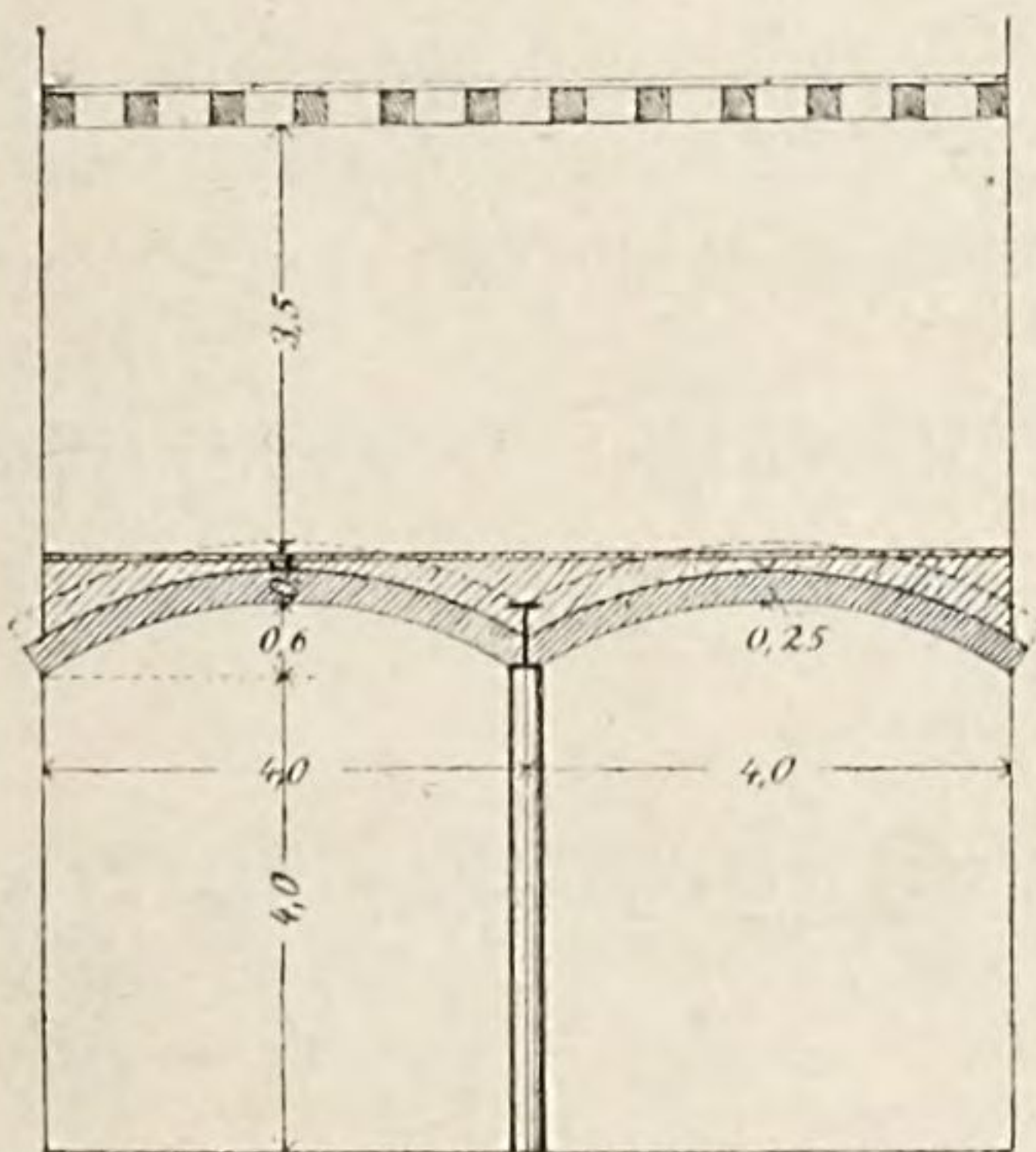
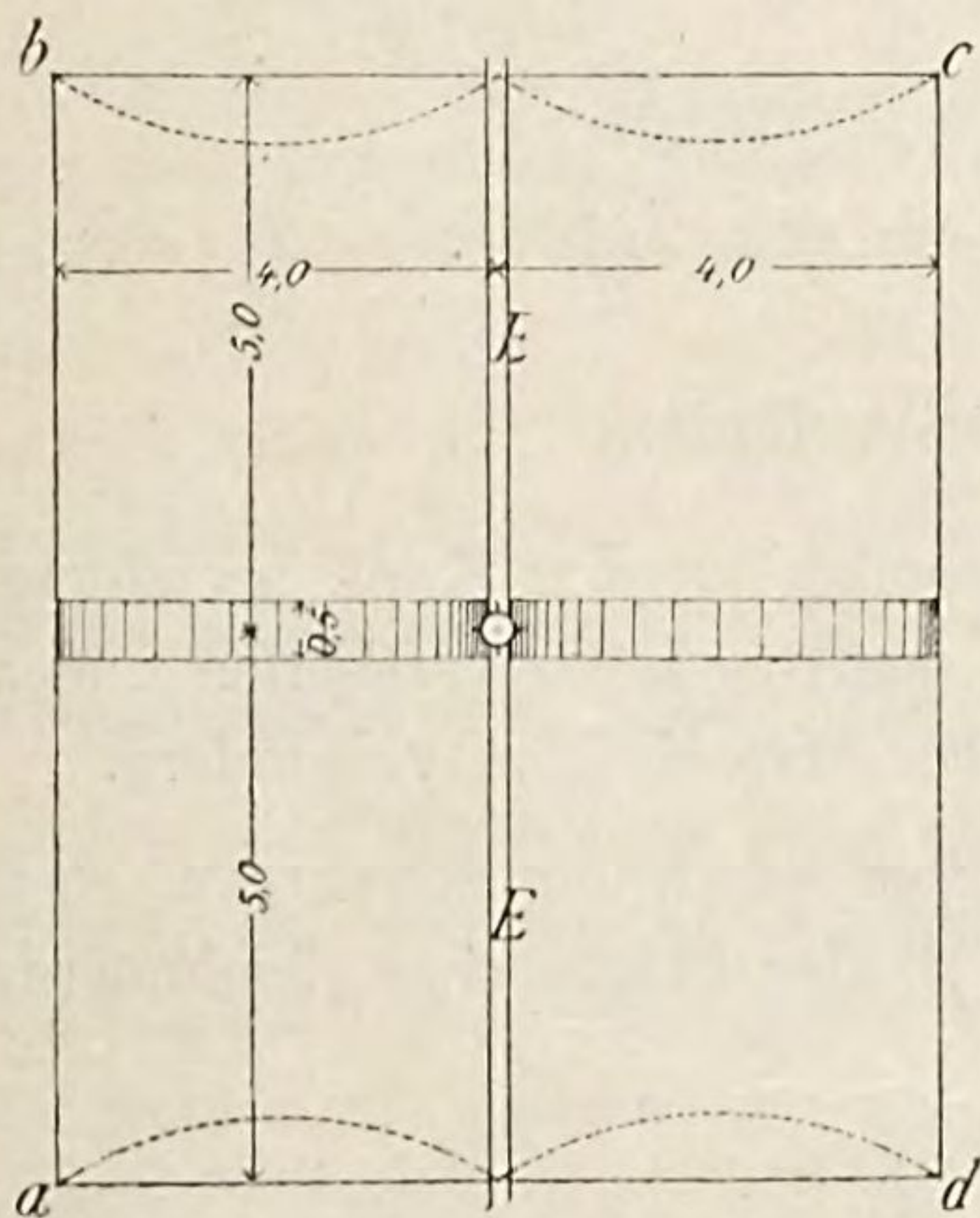


Fig. 40.



Gewölbe. Man untersuche das Gleichgewicht der Kappen und Gurtbögen nach Th. I S. 59. Es ergibt sich für beide in den Stabilitätsbedingungen entsprechender Verlauf der Drucklinie und bei den Kappen eine grösste Pressung (am Kämpfer) von 3,5, bei den Gurtbögen von 9 *kg pro qcm*.

I-Träger E. Querschnittsfläche einer Kappe incl. Uebermauerung: 2,5 *qm*.

Gewicht des lfd. *m* Kappe: $2,5 \cdot 2400 = 6000 \text{ kg} = p$, zufällige Last per lfd. *m* Kappe: $4 \cdot 600 = 2400 \text{ kg} = q$, daher, da der Träger *E* ein continuirlicher Träger von 2 Oeffnungen à 5 *m* Spannweite,

$$\mathfrak{M}_p = \frac{6000 \cdot 5^2}{8} = 18750 \text{ m kg}$$

$$\text{und } \mathfrak{M}_q = \frac{2400 \cdot 5^2}{8} = 7500 \text{ m kg.}$$

$$\varphi = \frac{\mathfrak{M}_p}{1,5 \mathfrak{M}_q} = 1,7, \sigma = 3,1, \tau = \sigma - \varphi = 1,4.$$

$$\mathfrak{M}_p + 1,5 \tau \mathfrak{M}_q = 34500 \text{ m kg daher aus:}$$

$$1600 \frac{\Theta}{m} = 3450000 \text{ cm kg}$$

$$\frac{\Theta}{m} = 2156,25.$$

Diesem Werthe entspricht das Prof. 47 $\frac{1}{2}$ der Tabelle Seite 20 mit dem nächstgrösseren Werthe $\frac{\Theta}{m} = 2396$. Da das Eigengewicht des Trägers No. 47 $\frac{1}{2}$ 127,6 *kg per m* und das

Moment des Eigengewichts 398,75 *m kg*, so hat man jetzt $\mathfrak{M}_p + 1,5 \tau \mathfrak{M}_q = 34898,75 \text{ m kg}$, daher die auf ruhende Belastung reducirte Spannung:

$$\alpha = \frac{3489875}{2396} = 1456 \text{ kg per } qcm.$$

Säule. Gewicht eines Gurtbogens sammt darüber befindlicher Mauer: 19800 *kg*,
Gewicht der Decke, soweit sie von einem Gurtbogen aufgenommen wird: $305 \cdot 20 = 6100$ *kg*, daher ständige, durch beide Gurtbögen auf die Säule übertragene Last: 25900 *kg*.

Ständige, durch den **I** Träger auf die Säule übertragene Last: $\frac{10}{8} 6127,6 \cdot 5 = 38297$ *kg*, somit ständige Belastung der Säule: $P_v = 25900 + 38297 = 64197$ *kg*.
Veränderliche, durch die Gurtbögen auf die Säule übertragene Last: $260 \cdot 4 \cdot 5 = 5200$ *kg*, desgleichen durch den **I** Träger: $\frac{10}{8} \cdot 2400 \cdot 5 = 15000$ *kg*, daher veränderliche Belastung der Säule: $P = 20200$ *kg*.

$$\text{Da} \quad \varphi = \frac{P_v}{1,5 P_0} = 2,12$$

$$\text{und} \quad \sigma = 3,5$$

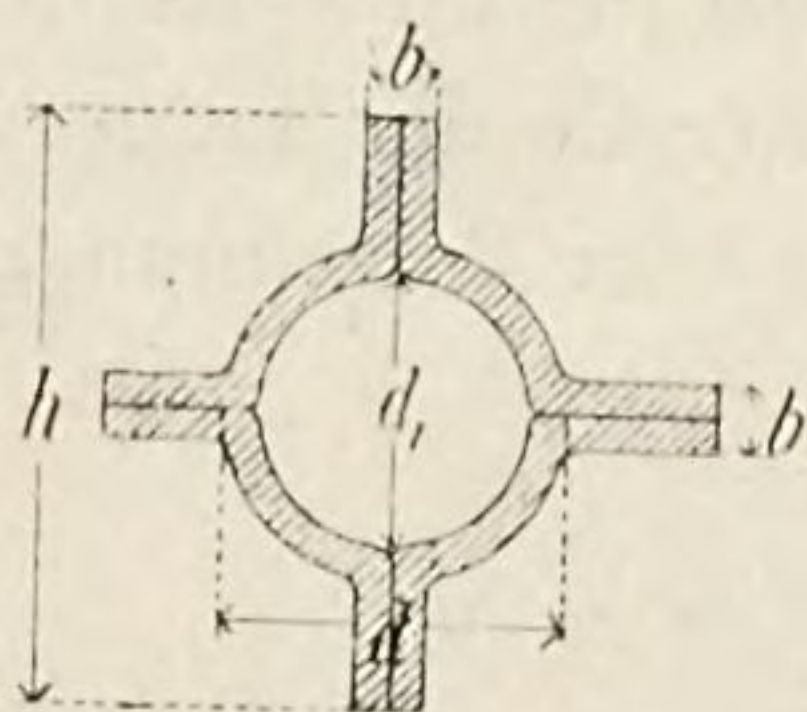
$$\text{so ist} \quad \tau = \sigma - \varphi = 1,38,$$

$$\text{daher} \quad 1600 F' = P_v + 1,5 \tau P_0$$

mithin Zug- oder einfache Druckfläche $F' = 66,3$ *qcm*. Die wirkliche Querschnittsfläche F ergibt sich nach

$$F = F' \left(1 + 0,00008 \frac{Fl^2}{\Theta} \right).$$

Fig. 41.



Wird der Querschnitt aus vier Quadranteisen Fig. 41 konstruiert und nimmt man $h = \frac{3}{2} d$, $b = \frac{1}{10} d$, $d_1 = \frac{9}{10} d$ an,

$$\text{so ist } F = 0,25 d^2$$

$$\text{und } \Theta = 0,037 d^4,$$

$$\text{so dass } 0,25 d^2 = 66,3 \left(1 + 0,00008 \cdot \frac{0,25 d^2 \cdot 160000}{0,037 d^4} \right)$$

$$\text{oder } 0,25 d^4 - 66,3 d^2 = 5734,95.$$

Somit $d = 18,3$ *cm*, $d_1 = 16,5$ *cm*, $b = 1,83$ *cm* und $h = 27,5$ *cm*.

Fuss- und Kopf-Platten eiserner Säulen.

Zur Aufnahme und Uebertragung des Säulendruckes werden Kopf- beziehungsweise Fussplatten verwendet, deren Zweck es ist, den Druck zu vertheilen und zu starke Beanspruchungen des auf die Platte folgenden Materials zu verhindern.

Wirkt der Säulendruck P auf die Platte in deren verticaler Schweraxe, so ist die Druckvertheilung über den Horizontalschnitt F der Platte eine gleichmässige und bestimmt sich demnach F aus der Gleichung

$$F = \frac{P}{\beta},$$

wo für β die zulässige Beanspruchung desjenigen Materials zu setzen ist, auf welches der Säulendruck durch die Platte übertragen wird.

Die Kopf- und Fuss-Platten erleiden auch nach verticalen Querschnitten Scheer- und Biegungsbeanspruchungen, von welchen die Letzteren als die stärkeren für die Dicke der Platten maassgebend sind.

So kann z. B. der zur Diagonale BD parallele Querschnitt MN der quadratischen Platte $ABCD$ Fig. 42 dem Angriff eines Biegemomentes

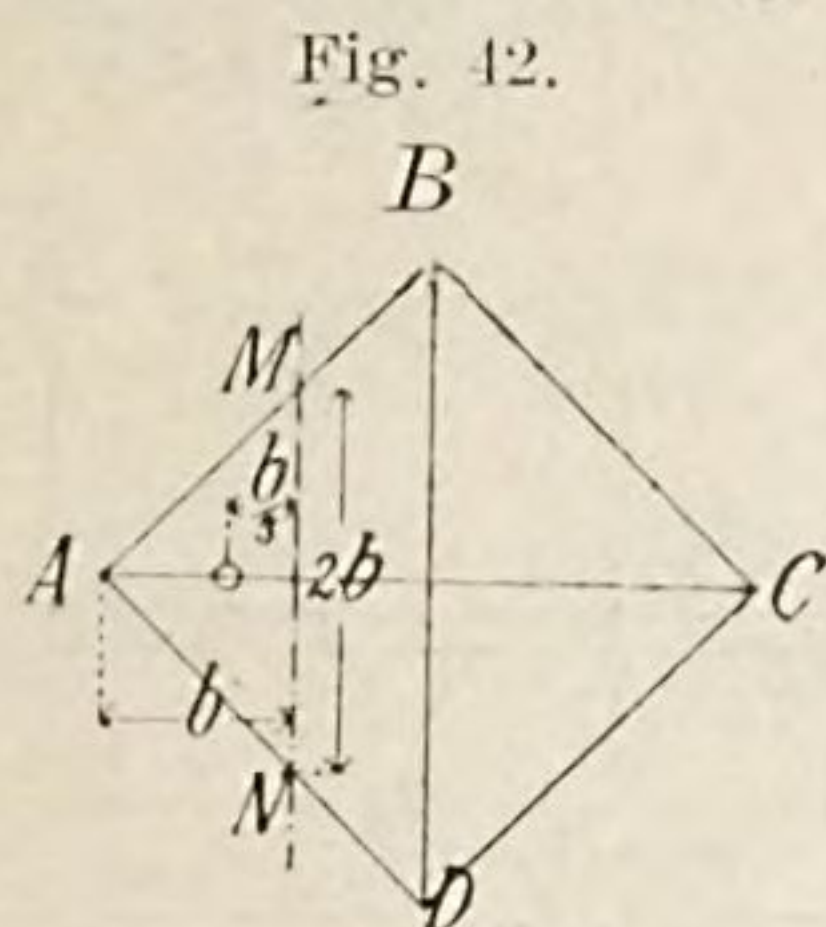


Fig. 42.

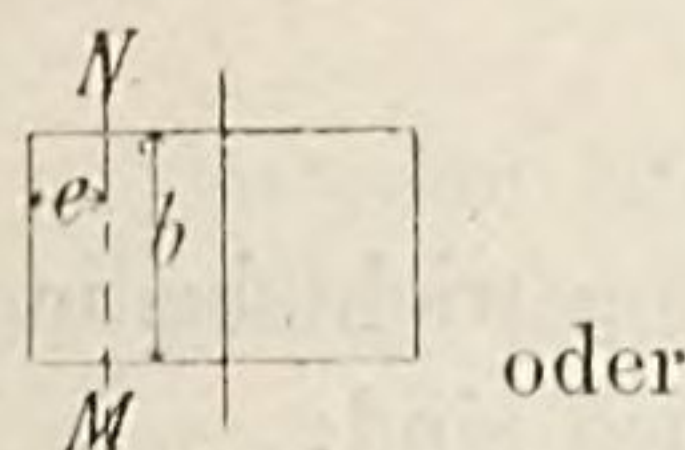
$2b \cdot \frac{b}{2} \beta \cdot \frac{1}{3} b$ ausgesetzt sein, so dass die Plattendicke d an der betreffenden Stelle, wenn β' die zulässige Zugbeanspruchung des Materials und $\beta' \cdot \frac{1}{6} 2b d^2$ das Widerstandsmoment des verticalen Querschnitts, der Bedingung

$$d = b \sqrt{\frac{\beta}{\beta'}} \quad *) \quad (74)$$

zu entsprechen hat.

Die Plattendicke ist also vom Rande gegen die Mitte hin zu verstärken. Ein Gleiches gilt auch für Auflagerplatten von Trägern, Dachconstructionen und dgl. Für eine rechteckförmige Unterlagsplatte von der Breite b erhält man die Stärke d des nun e vom Rande abstehenden Querschnitts MN Fig. 43 aus der Gleichung:

Fig. 43.



oder

$$b e \cdot \beta \frac{e}{2} = \beta' \cdot \frac{1}{6} b d^2$$

$$d = e \sqrt{3 \frac{\beta}{\beta'}} \quad (75)$$

wenn β der über die Grundfläche gleichmässig vertheilte Druck und β' die zulässige Spannung im Querschnitt MN ist.

§ 3.

Der Träger mit frei schwebenden Stützpunkten. (Continuirlicher Gelenkträger).

Verlängert man einen auf zwei Pfeilern oder Säulen $A A_2$ Fig. 44 ruhenden Träger über einen dieser Pfeiler hinaus, so kann der Endpunkt F_1' dieser Verlängerung auch als Stützpunkt für einen folgenden frei aufliegenden Träger $F_1' F_1''$ dienen, dessen zweites Ende F_1'' entweder auf einem Pfeiler oder ebenfalls auf einer consolartigen Ausladung des anstossenden, über die nächste Stütze verlängerten Balkens ruht. Diese von Direktor Gerber zuerst angegebene Construction hält die Mitte zwischen dem continuirlichen Träger und zwischen der Aufeinanderfolge von einfachen frei aufliegenden Tragbalken über den Oeffnungen $A A_2$, $A_2 A_3$ und $A_3 A_4$.

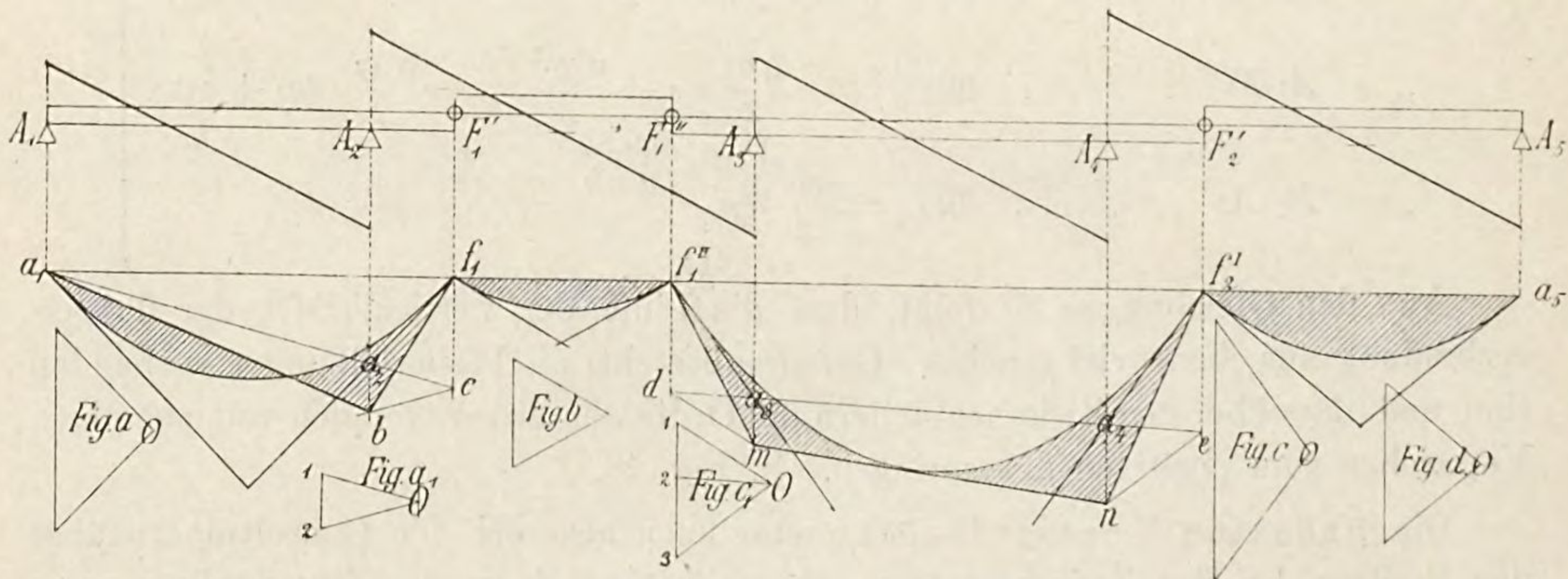
Zwar wird durch den Träger mit frei schwebenden Stützpunkten die Materialersparniss des continuirlichen Trägers nicht erreicht, dafür aber der Vorthail der Unabhängigkeit von der Höhenlage der Stützen, sowie der einfacheren Berechnungsweise gewonnen, während im Vergleich mit den einfachen von Pfeiler zu Pfeiler reichenden Trägern eine erhebliche Verminderung der Maximalmomente eintritt. Aus diesen Gründen empfiehlt sich der Träger mit frei schwebenden Stützpunkten auch für eiserne Decken- und Träger-Constructionen im Hochbau.

*) Vergl. Intze, Tabellen und Beispiele für die rationelle Verwendung des Eisens zu einfachen Bauconstructionen, Berlin 1878.

Graphische Lösung. Man zeichnet Fig. 46 (nach Th. II S. 16 mit Hülfe der Kräftepolygone Fig. *a* bis *d* die Momentenparabeln der gleichmässig vertheilten Belastung für die einzelnen Träger $A_1 F_1'$, $F_1' F_1''$, $F_1'' F_2'$, $F_2' A_5$, wobei man die Pole der einzelnen Kräftepolygone auf Linien annimmt, welche die betreffenden Kräftezüge senkrecht schneiden, so dass die Schlusslinien für die Oeffnungen $F_1' F_1''$ und $F_2' A_5$ in die Horizontale $a_1 a_5$ fallen.

Die Schlusslinien der ersten und dritten Oeffnung ergeben sich als Verbindungslinien $a_1 a_2$ und $a_3 a_4$ der Schnittpunkte der betreffenden Auflagerverticalen mit den Endtangenten der Parabeln, wobei indessen die den Consolträgern durch die Auflagerdrücke der freien Balken $F_1' F_1''$ und $F_2' A_5$ erwachsende Beanspruchung noch

Fig. 46.



nicht berücksichtigt ist. Es sind deshalb der Belastung des Trägers $A_1 F_1'$ der Auflagerdruck $\frac{1}{2} q a_1$ in F_1' und der Belastung des Trägers $F_1'' F_2'$ die Auflagerdrücke $\frac{1}{2} q a_1$ und $\frac{1}{2} q a_2$ in F_1'' und F_2' hinzuzufügen. Man trägt zu diesem Zwecke in Fig. *a* $\frac{1}{2} q a_1 = 12$ auf und nimmt den Pol, selbstverständlich in der nämlichen Poldistanz wie bei den übrigen Kräftepolygonen so an, dass der erste Strahl 01 parallel wird der vorher bestimmten Schlusslinie $a_1 a_2$, dann liefert die Parallele $c b$ zum Strahl 02 das Momentendreieck $a_1 b c$ des Auflagerdruckes in F_1' und man braucht blos die Verbindungslinie $b f_1$ zu ziehen, um in der von der Parabel und den Geraden $a_1 b$, $b f_1$, eingeschlossenen, schraffirten Fläche die algebraische Summe der Momentenflächen der gleichmässig vertheilten Belastung und des Auflagerdruckes bei F_1' , also die resultierende Momentenfläche des Trägers $A_1 F_1'$ zu erhalten.

Auf ähnliche Weise wird beim Träger $F_1'' F_2'$ die Momentenfläche der gleichmässig vertheilten Belastung mit derjenigen der Stützendrücke in F_1'' und F_2' vereinigt. Man trägt diese Stützendrücke in Fig. *c* als Längen 12 und 23 auf, nimmt den Pol so an, dass der Strahl 02 parallel $a_3 a_4$ wird, so ist $m d e n$ das Seilpolygon der genannten Stützendrücke mit der Schlusslinie $m n$ und die zwischen Parabel und dem Polygon $f_1'' m n f_2'$ eingeschlossene schraffierte Fläche ist die Gesamtmomentenfläche für $F_1'' F_2'$. In Fig. 45 schneidet $m n$ die Parabel nicht, es treten somit im vorliegenden Falle innerhalb der Oeffnung $A_3 A_4$ keine positiven Momente auf.

B. Der Gelenkträger Fig. 46 ist durch bewegliche Belastung beansprucht.

Vertikalkräfte.

1. Trägertheil $A_1 A_2$. Jede rechts von dem beliebigen Querschnitt M_1 , zwischen diesem und A_2 befindliche Einzellast erzeugt in M_1 eine positive Vertikalkraft. Dagegen bringt jede links von M_1 und jede auf dem überhängenden Balkentheil $A_2 F_1'$ vorhandene Last in M_1 eine negative Vertikalkraft hervor. Demnach entsteht die grösste positive Vertikalkraft bei ausschliesslicher Belastung der Strecke $M_1 A_2$ (Fig. 47) und die grösste negative Vertikalkraft, wenn $M_1 A_2$ nicht, dagegen aber $A_1 M_1 A_2 F_1'$ und der rechts angrenzende Träger $F_1' F_1''$ voll belastet sind. (Fig. 48).

Fig. 47.

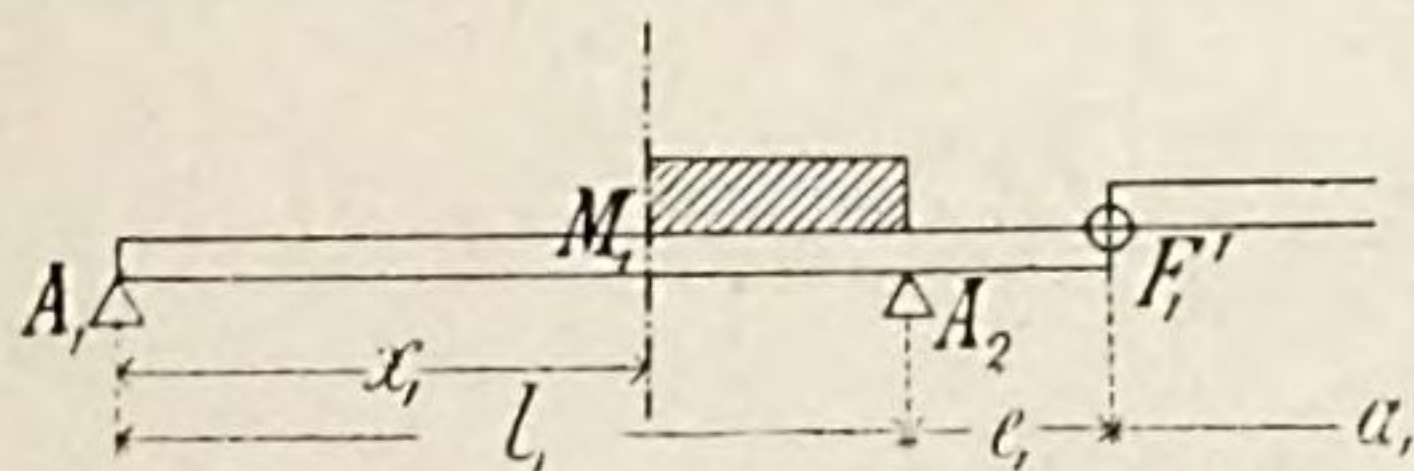
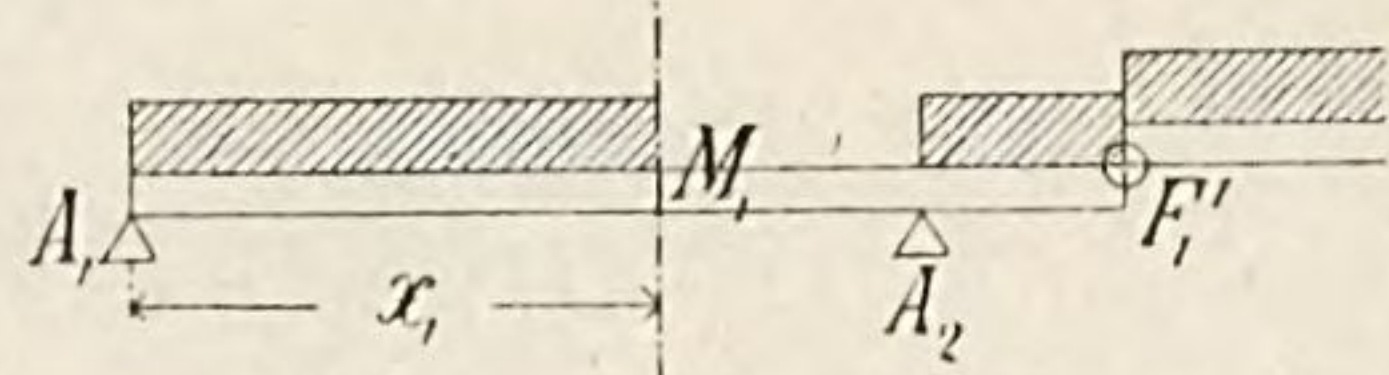


Fig. 48.



Bei gleichmässig vertheilter mobiler Last hat man daher:

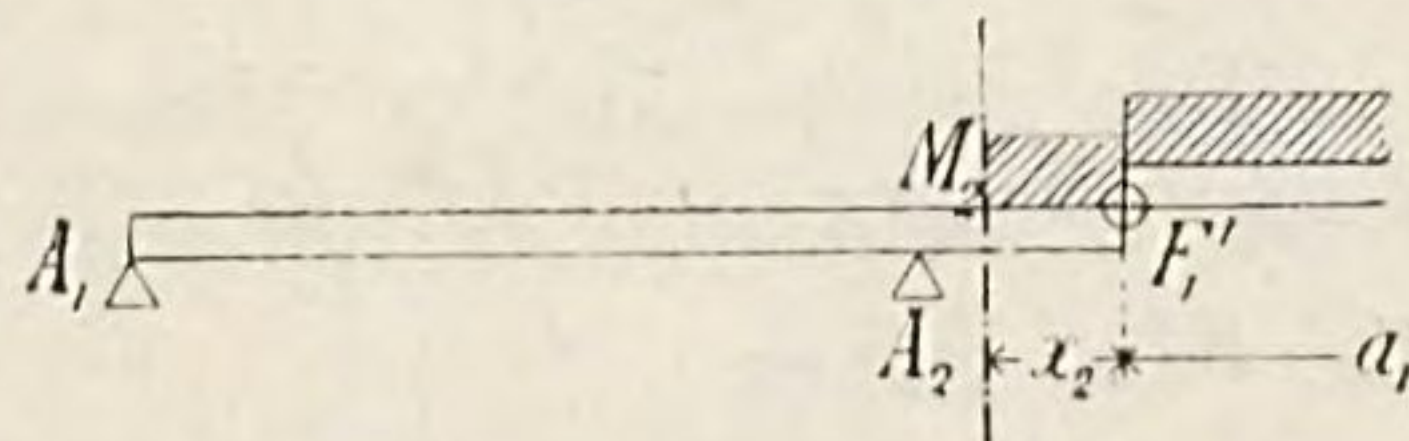
$$+ V_{\max} = \frac{q (l_1 - x_1)^2}{2 l_1} \quad \dots \dots \dots (84)$$

$$\text{und } - V_{\max} = - \frac{q}{2 l_1} [e_1 (e_1 + a_1) + x_1^2] \quad \dots \dots \dots (85)$$

2. Trägertheil $A_2 F_1'$. Für den beliebigen Querschnitt M_2 dieser Strecke wird bei voller Belastung von $M_2 F_1'$ und des angrenzenden Trägers $F_1' F_1''$ (Fig. 49) das positive Maximum von V erreicht:

$$+ V_{\max} = \frac{q}{2} (a_1 + 2 x_2) \quad \dots \dots \dots (86)$$

Fig. 49.



Negative Vertikalkräfte kommen innerhalb dieser Strecke nicht vor.

3. Trägertheil $F_1' F_1''$. Für diesen mit beiden Enden frei aufliegenden Träger wird die Vertikalkraft irgend eines Querschnitts M_3 zum positiven oder negativen Maximum, je nachdem die rechts oder links von M_3 befindliche Balkenstrecke belastet ist:

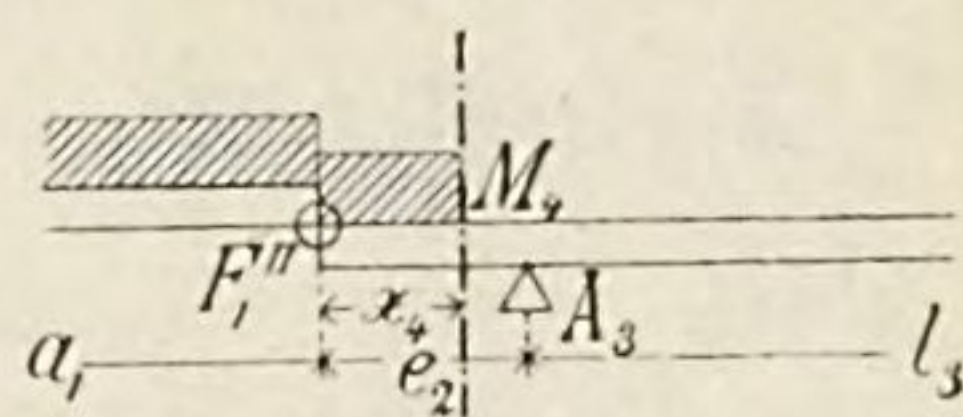
$$+ V_{\max} = \frac{q (a_1 - x_3)^2}{2 a_1} \quad \dots \dots \dots (87)$$

$$- V_{\max} = \frac{q x_3^3}{2 a_1} \quad \dots \dots \dots (88)$$

4. Trägertheil $F_1'' A_3$. Es treten nur negative Vertikalkräfte auf, von welchen bezüglich des Querschnitts M_4 die grösste durch Belastung des Trägers $F_1' F_1''$ und der Strecke $F_1'' M_4$ Fig. 50 erhalten wird.

$$- V_{\max} = - \frac{q}{2} (a_1 + 2 x_4) \quad \dots \dots \dots (89)$$

Fig. 50.



5. Trägertheil $A_3 A_4$. Im Querschnitt M_5 wird das Maximum der positiven Vertikalkraft hervorgebracht durch Belastung der rechts vom fraglichen Querschnitt befindlichen Strecke $M_5 A_4$, ferner des links von A_3 befindlichen Trägertheile $A_3 F_1''$ und $F_1'' F_1'$ (Fig. 51):

$$+ V_{\max} = \frac{q}{2l_3} [a_1 (e_2 + l_3) + e_2 (e_2 + 2l_3) + (l_3 - x_5)^2] \quad (90)$$

Fig. 51.

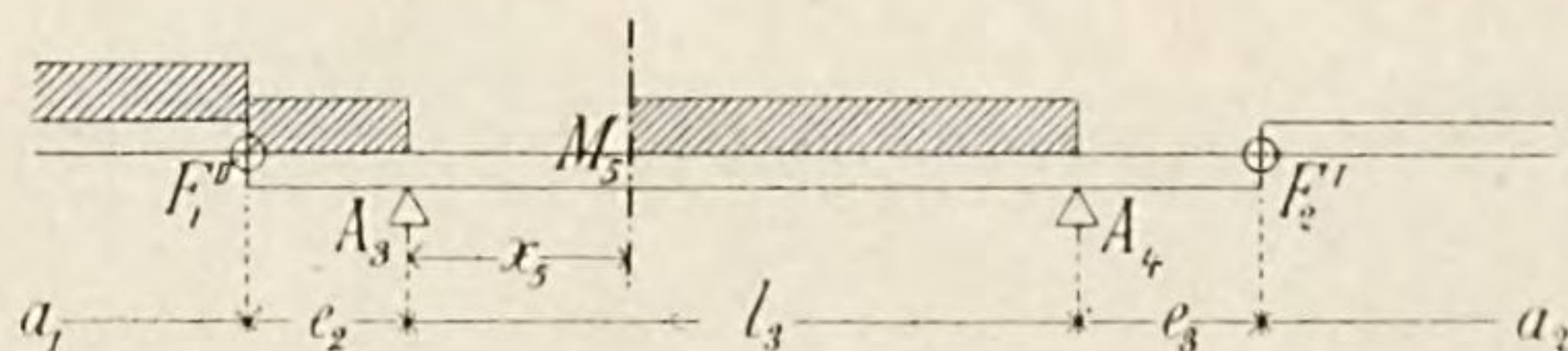
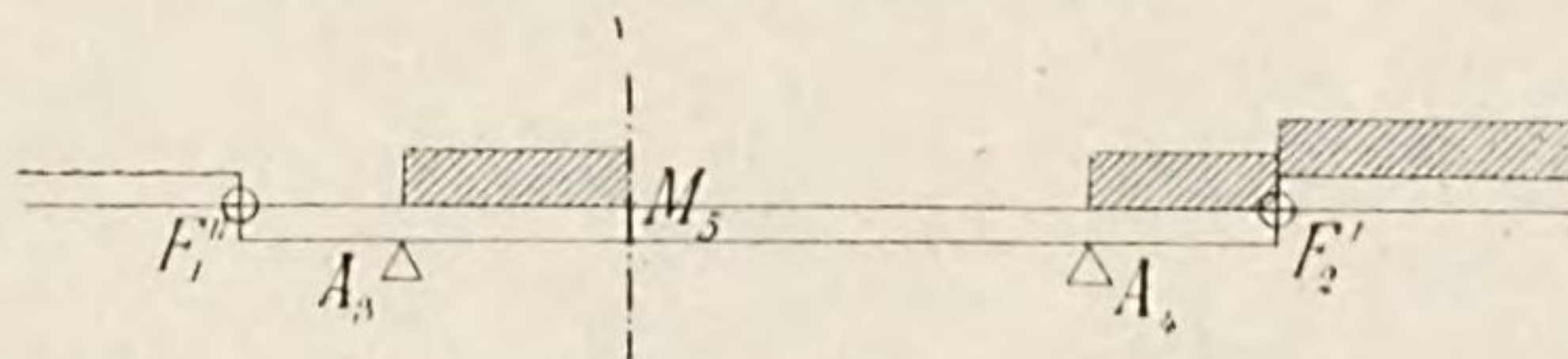


Fig. 52.



Das negative Maximum tritt bei gerade entgegengesetzter Belastungsweise auf (Fig. 52)

$$- V_{\max} = - \frac{q}{2l_3} [x_5^2 + e_3 (e_3 + a_2)] \quad (91)$$

Für die Trägertheile $A_4 F_2'$ und $F_2' A_5$ gelten die Formeln 86 beziehungsweise 87 und 88.

Momente.

1. Trägertheil $A_1 A_2$. Das grösste positive Moment für den Querschnitt M_1 tritt bei voller Belastung des Endfeldes $A_1 A_2$ auf und Entlastung der folgenden Strecken $A_2 F_1'$, $F_1' F_1''$ (Fig. 53). Daher

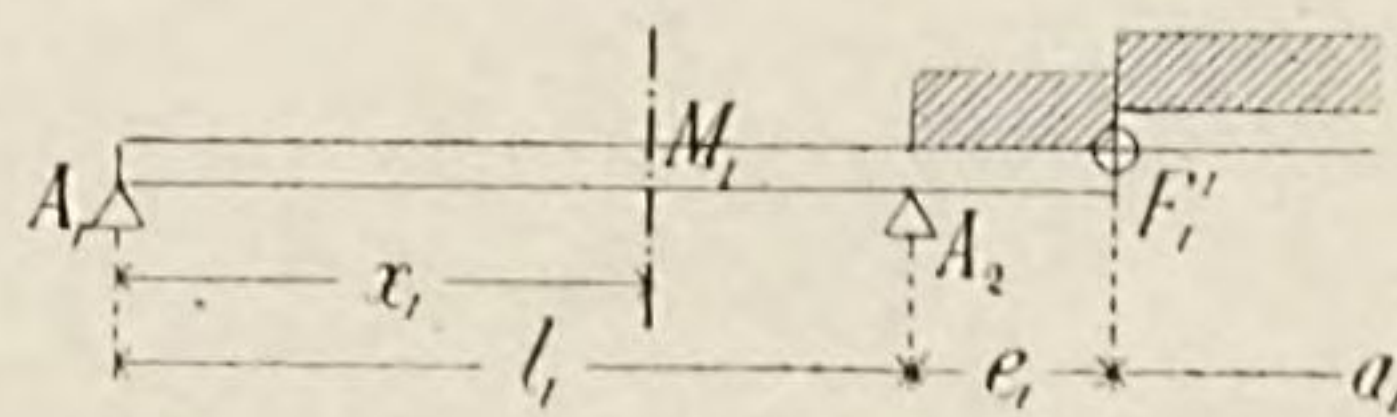
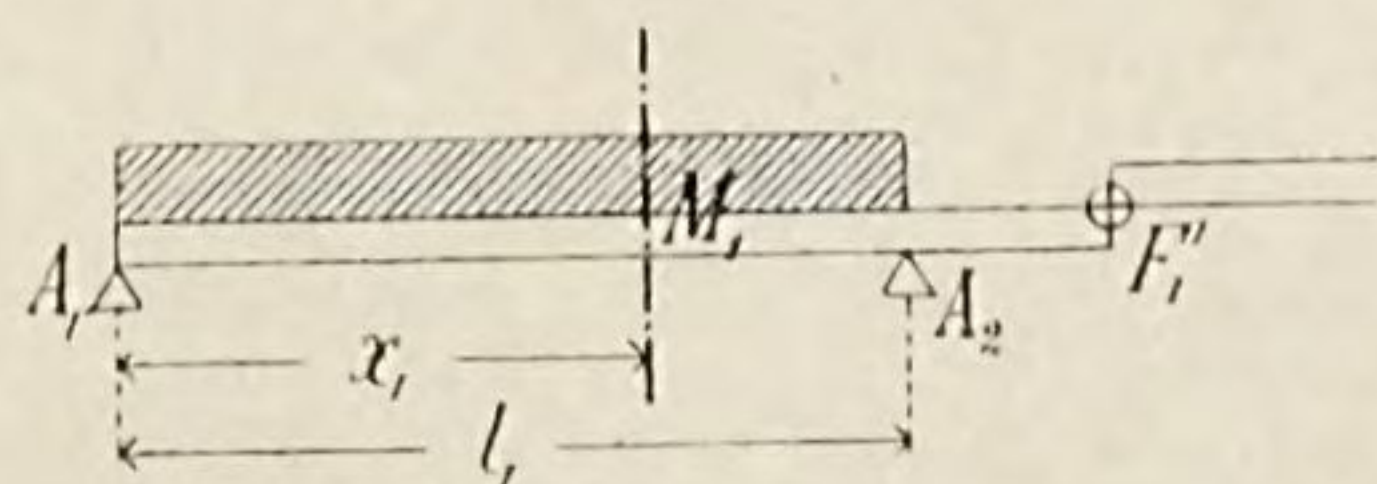
$$\mathfrak{M}_{\max} = \frac{q x_1}{2} (l_1 - x_1) \quad (92)$$

Das grösste negative Moment ergibt sich dagegen, wenn $A_1 A_2$ entlastet und die beiden angrenzenden Felder belastet sind. (Fig. 54).

$$\mathfrak{M}_{\max} = - \frac{q x_1}{2 l_1} e_1 (e_1 + a_1) \quad (93)$$

Fig. 53.

Fig. 54.



2. Trägertheil $A_2 F_1'$. Es können nur negative Momente entstehen und das grösste entspricht für den Querschnitt M_2 der Belastung von $M_2 F_1'$ und $F_1' F_1''$ (Fig. 49):

$$- \mathfrak{M}_{\max} = - \frac{q x_2}{2} (a_1 + x_2) \quad (94)$$

ständigen Last innerhalb der Mittelöffnung EE' . In diesem Falle erhält man e nach Gleichung 82 und 83 aus:

$$\frac{p e}{2} (7 - 2e + e) = \frac{p}{8} (7 - 2e)^2$$

$$e = 1,025$$

und

$$a = 4,95.$$

Damit berechnen sich nach den Gleichungen 76 und 77 die Auflagerdrücke der ständigen Last in A und C :

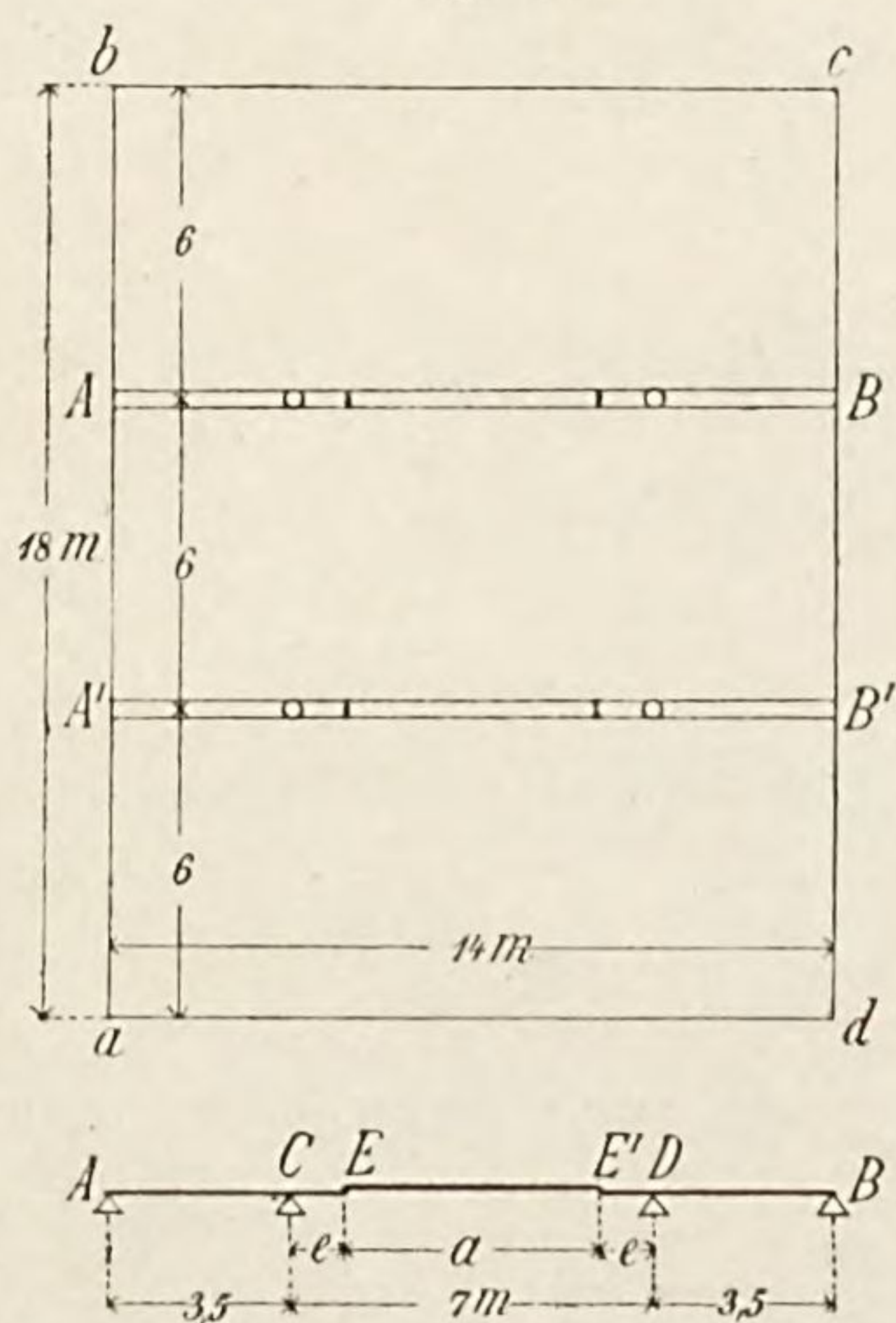
$$D_v' = 1575,161$$

$$D_v'' = 11024,83,$$

sowie das Maximalmoment der Consolträger AE und das der Mittelöffnung EE' :

$$\max \mathfrak{M}_p = 5512 \text{ m kg.}$$

Fig. 57.



Zufällige Last. Die grössten, durch die Verkehrslast in A und C erzeugten Stützendrücke sind:

$$D'_q = 2100,214 \text{ kg}$$

$$D''_q = 14699,786 \text{ kg.}$$

Consolträger AE . Das grösste positive Moment findet bei Belastung der Oeffnung AC und Entlastung der übrigen Trägertheile statt:

$$+ \max \mathfrak{M}_q = 3675 \text{ m kg}$$

$$\text{bei } x = 1,75.$$

Das grösste negative Moment tritt in C bei ausschliesslicher Belastung von CE und EE' (Fig. 57) auf:

$$- \max \mathfrak{M}_q = 7350 \text{ m kg.}$$

daher letzterer Werth für die Querschnittsbestimmung maassgebend.

Mittelöffnung EE' . Das grösste positive Moment, bei totaler Belastung dieser Oeffnung auftretend, ist wie leicht erklärlich, dem vorher berechneten grössten negativen Moment bei C gleich:

$$+ \max \mathfrak{M}_q = 7350 \text{ m kg.}$$

Da die $\mathfrak{M}_{p \max}$ und die Maximalwerthe von $\mathfrak{M}_q$ für die Consolträger AE , $E'B$, sowie auch für die Mittelöffnung EE' die nämlichen sind, so erhalten diese Träger gleiche Querschnittsdimensionen. Wir nehmen die Höhe des Blechwandträgers zu 40 cm an und bestimmen zunächst die Dicke der Mittelrippe nach Gl. 69¹. Die grössten Verticalkräfte treten in C und D auf. Unmittelbar links vom Stützpunkt C ist nach Gl. 80 $V_v = -4725 \text{ kg}$ und unmittelbar rechts von C $V_v = +6300$. Das negative Maximum von V_q unmittelbar vor C ist nach Gl. 85 gleich 6300 kg, $+ \max V_q$ aber unmittelbar nach C (Gl. 86) gleich 8400 kg, daher die grösste Verticalkraft an den Stützpunkten gleich $6300 + 8400 = +14700 \text{ kg}$ und

$$a = \frac{14700}{350 \cdot 40} = 1 \text{ cm.}$$

$$\text{Mit } \mathfrak{M}_p = 5512 \text{ und } \mathfrak{M}_q = 7350 \text{ ist } \varphi = \frac{5512}{1,5 \cdot 7350} = 0,5, \quad \sigma = 2,0, \text{ daher}$$

$$\tau = \sigma - \varphi = 1,5 \text{ und } \mathfrak{M}_v + 1,5 \tau \mathfrak{M}_q = 22049,5$$

und der Querschnitt F_1 für obere oder untere Gurtung des Blechträgers nach Gl. 68¹

$$F_1 = \frac{2204950}{1600 \cdot 40} - \frac{1}{6} \cdot 1,0 \cdot 40 = 28 \text{ qcm.}$$

Die Säulen haben je eine ständige axiale Belastung $D''_p = 11025 \text{ kg}$ und eine variable $D''_q = 14700 \text{ kg}$ aufzunehmen. Daher:

$\varphi = \frac{11025}{1,5 \cdot 14700} = 0,5$, $\sigma = 2,0$ und $\tau = \sigma - \varphi = 1,5$. Hienach berechnet sich die Zugfläche F' :

$$1600 F' = 11025 + 1,5 \cdot 1,5 \cdot 14700$$

$$F' = 27,6,$$

und die mit Rücksicht auf die Knick-Beanspruchung erforderliche Querschnittsfläche F :

$$F = 27,6 \left(1 + 0,00008 \frac{F l^2}{\Theta} \right).$$

Wird $d = \frac{1}{10} b$ gesetzt (Fig. 36) so ist $F = 0,19 b^2$ und $\Theta = 0,0084 b^4$,

daher

$$0,19 b^2 = 27,6 \left(1 + 0,00008 \frac{0,19 b^2 \cdot 350^2}{0,0084 b^4} \right)$$

oder

$$b^4 - 145 b^2 = 32200,$$

woraus $b = 16,3 \text{ cm}$ und $d = 1,63 \text{ cm}$.

§ 4.

Fachwerkträger.

Bestimmung der Stabkräfte von fachwerkförmigen Balkenträgern mit gekrümmten Gurtungen.

Die Fachwerkträger mit geraden parallelen Gurtungen wurden im Theil II Holzconstructions, S. 81 bis 86 behandelt. Es bleibt daher hier nur übrig, die erforderlichen Ergänzungen bezüglich der Fachwerkträger mit gekrümmten Gurtungen beizufügen.

Ein Fachwerkträger von beliebiger Form sei durch Einzellasten beansprucht, welche in den Knotenpunkten des Systems angebracht sind. Zur Bestimmung der in irgend einem Stabe des Trägers auftretenden Spannungen verfährt man wie a. a. O. angegeben. Man denkt die Construction durch einen Schnitt getrennt, welcher womöglich ausser dem fraglichen Stabe nicht mehr als zwei andere trifft, denkt ferner den rechts (oder auch links) vom Schnitt befindlichen Trägertheil weggenommen und dessen Wirkung auf das übrig bleibende Trägerfragment durch Kräfte ersetzt, welche an den Schnittstellen in den Längenrichtungen der betreffenden Stäbe wirkend, zunächst als Zugkräfte betrachtet werden. Die an dem vorhandenen Trägerfragment befindlichen äusseren Kräfte und die Stabkräfte müssen sich nun im Gleichgewicht befinden und wenn man, um die Beanspruchung eines zu untersuchenden Stabes zu erhalten, als Momentendrehpunkt den Schnitt der beiden anderen Stäbe wählt, so ergibt sich eine Gleichung, aus welcher die verlangte Stabkraft unmittelbar hervorgeht. Fällt das Zeichen positiv aus, so ist Zug vorhanden, im gegentheiligen Falle tritt Druckbeanspruchung auf. (Ritters Methode).

Auf solche Weise findet man die Stabkräfte eines Feldes Fig. 58 wie folgt:
Gurtungsstab III , Schnitt $\alpha\alpha$, Momentenpunkt 2:

$$D_1 (d_1 + d_2) - (P_1 + p_1) d_2 + T t = 0,$$

oder, wenn das Moment der äusseren Kräfte bezüglich des Knotenpunktes 2 mit $\mathfrak{M}_2$ bezeichnet wird,

$$T = - \frac{\mathfrak{M}_2}{t} = - \frac{\mathfrak{M}_2}{II_2 \cos \varepsilon} \quad \dots \quad (99)$$

Die Spannung ist Druck, so lange das Moment positiv.

Gurtungsstab 12, Schnitt $\alpha\alpha$, Momentenpunkt 1:

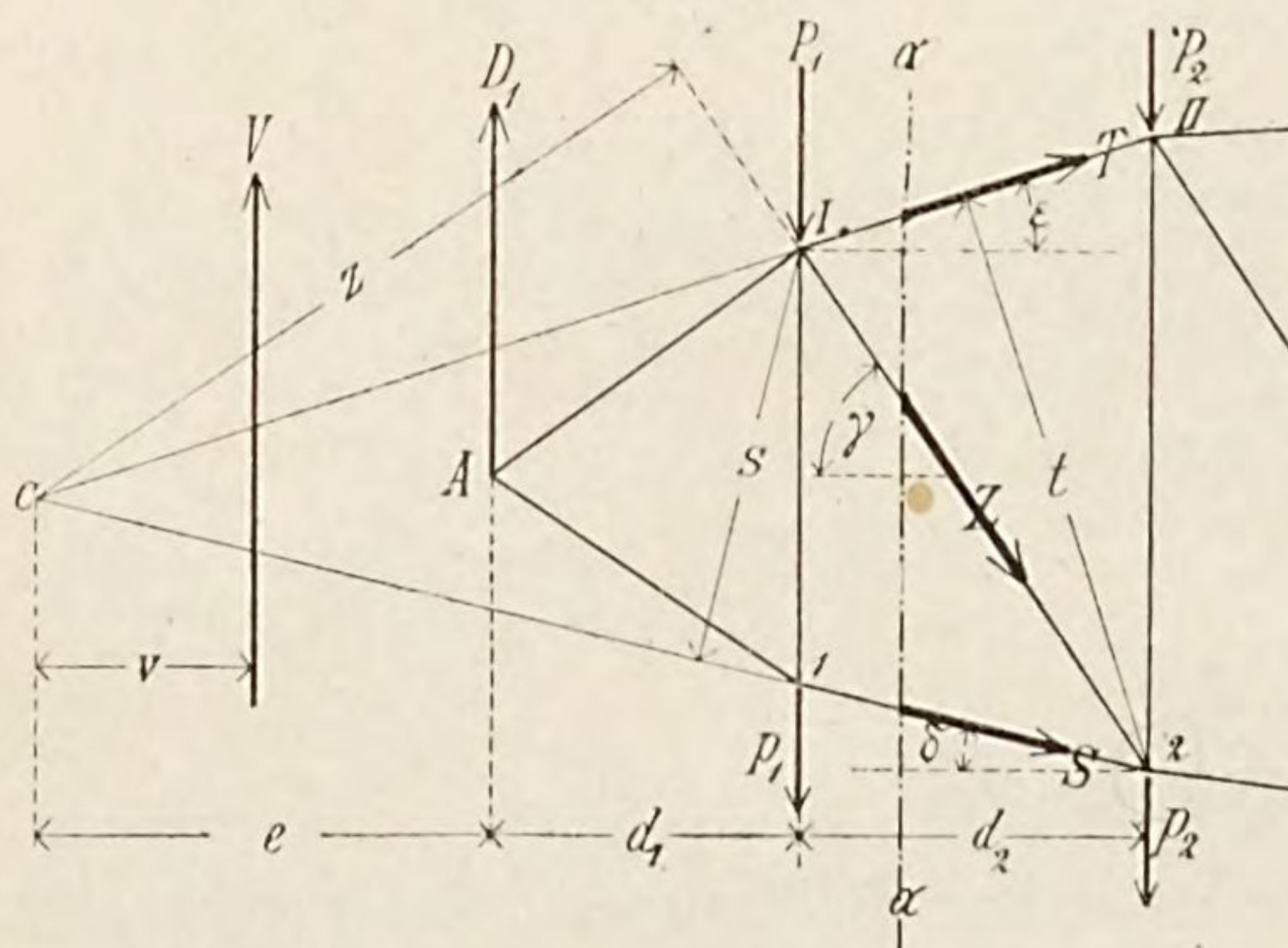
$$D_1 d_1 - S \cdot s = 0$$

$$\text{oder } S = \frac{\mathfrak{M}_1}{s} = \frac{\mathfrak{M}_1}{II_1 \cos \delta} \quad \dots \quad (100)$$

Die Spannung ist Zug, so lange das Moment positiv.

Diagonale $I2$, Schnitt $\alpha\alpha$, Momentenpunkt c :

Fig. 58.



$$- D_1 e + (P_1 + p_1) (e + d_1) + Z \cdot z = 0,$$

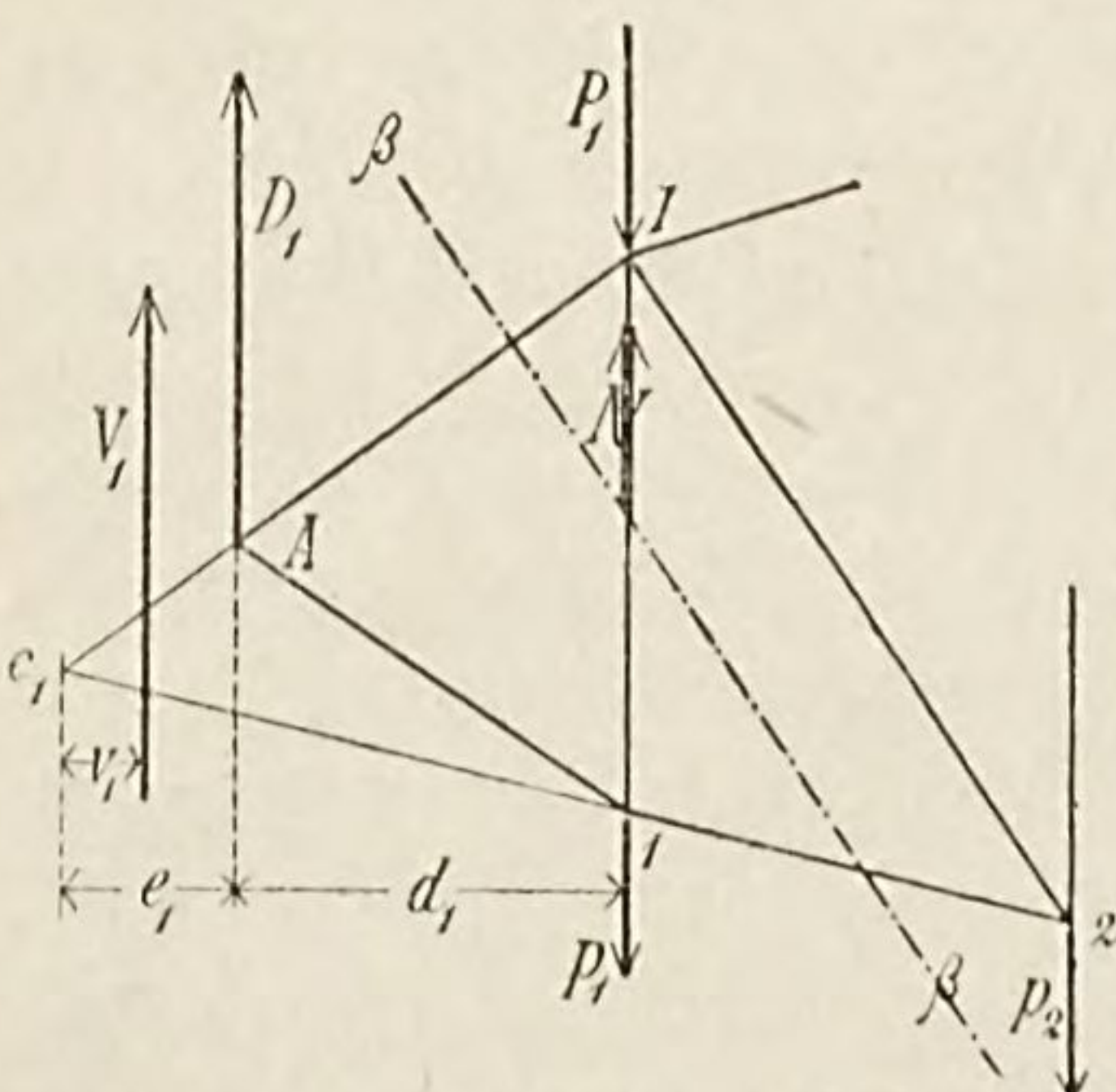
$$\text{daher } Z = \frac{D_1 e - (P_1 + p_1) (e + d_1)}{z},$$

oder, wenn die Resultirende von D_1 , P_1 und p_1 mit V bezeichnet wird und v ihr Abstand von c

$$Z = \frac{V \cdot v}{z} \quad \dots \quad (101)$$

Die Lage von V , ob links oder rechts von c ist für das Vorzeichen von Z maassgebend.

Fig. 59.



Einen anderen Ausdruck für Z liefert die Bedingung (Th. II S. 3, Gl. 7) dass die Summe der Horizontalcomponenten der Stabkräfte T , S und Z gleich Null sein müsse:

$$T \cos \varepsilon + S \cos \delta + Z \cos \gamma = 0.$$

Hieraus findet man, wenn für T und S die obigen Werthe eingesetzt werden:

$$Z \cos \gamma = \frac{\mathfrak{M}_2}{II_2} - \frac{\mathfrak{M}_1}{II_1} \quad \dots \quad (101^1)$$

Verticale I_1 , Schnitt $\beta\beta$, Fig. 59, Momentendrehpunkt c :

$$- D_1 e_1 + p_1 (e_1 + d_1) - N (e_1 + d_1) = 0,$$

$$\text{hieraus } N = \frac{- D_1 e_1 + p_1 (e_1 + d_1)}{e_1 + d_1}.$$

Bezeichnet V_1 die Resultirende der äusseren Kräfte hier von D_1 und p_1 , und ist v_1 ihr Abstand von c_1 , so ist

$$N = - \frac{V_1 v_1}{e_1 + d_1} : \quad \dots \quad (102)$$

auch hier also die Lage von V_1 , ob rechts oder links von c_1 für das Vorzeichen von N maassgebend.

Graphische Ermittlung der Stabkräfte (nach Culmann).

Für den Schnitt $\alpha\alpha$ Fig. 60 müssen die Stabkräfte T , Z , S und die Resultierende V der links vom Schnitt vorhandenen äusseren Kräfte sich das Gleichgewicht halten. Vereinigt man V und T zu einer Resultierenden R' , ferner Z und S zu einer Resultierenden R'' , so müssen R' und R'' gleich und entgegengesetzt sein und in eine Gerade zusammenfallen. Da R' durch k geht und R'' durch 2, so ist $k2$ die gemeinschaftliche Kraftlinie von R' und R'' .

Fig. 60.

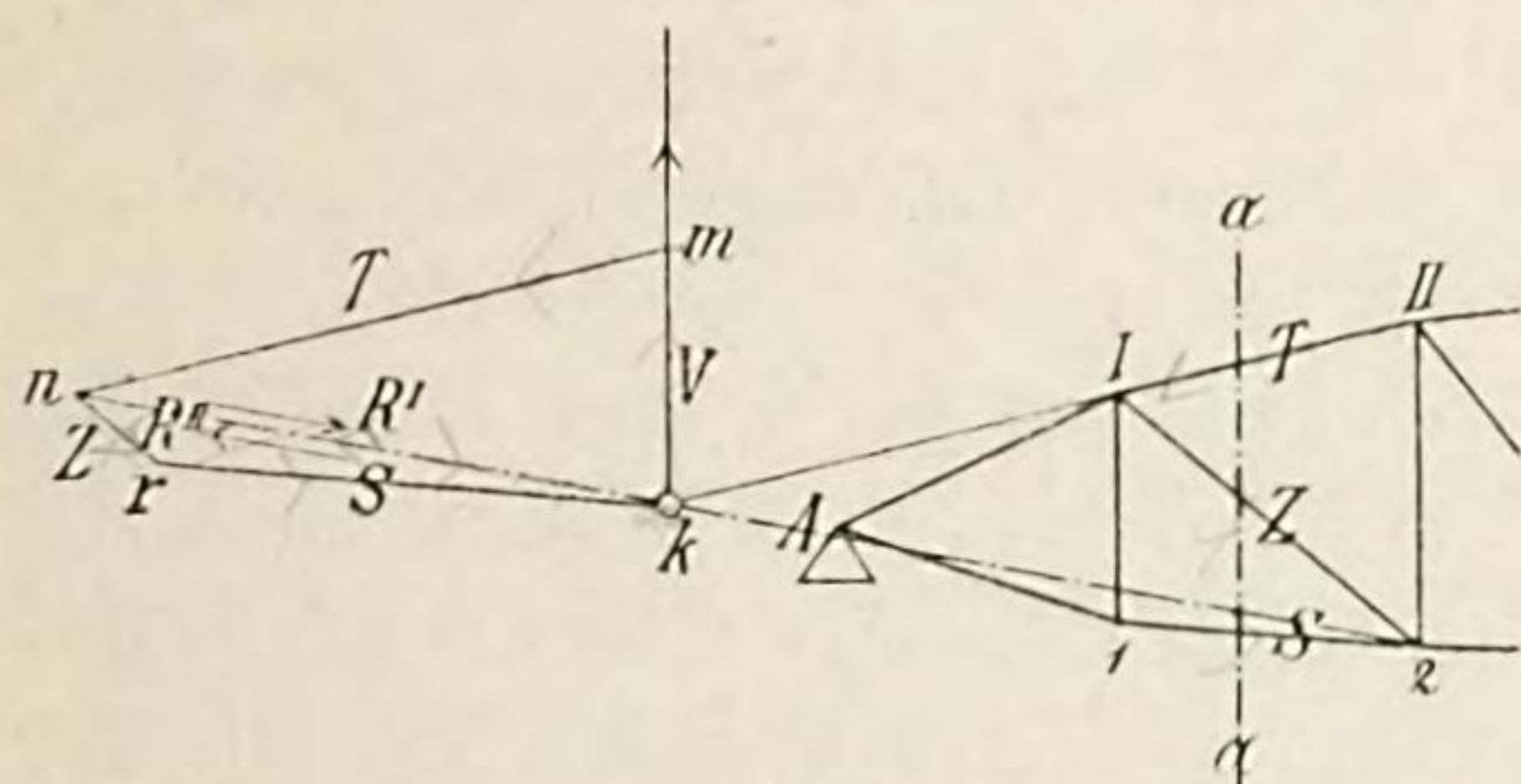
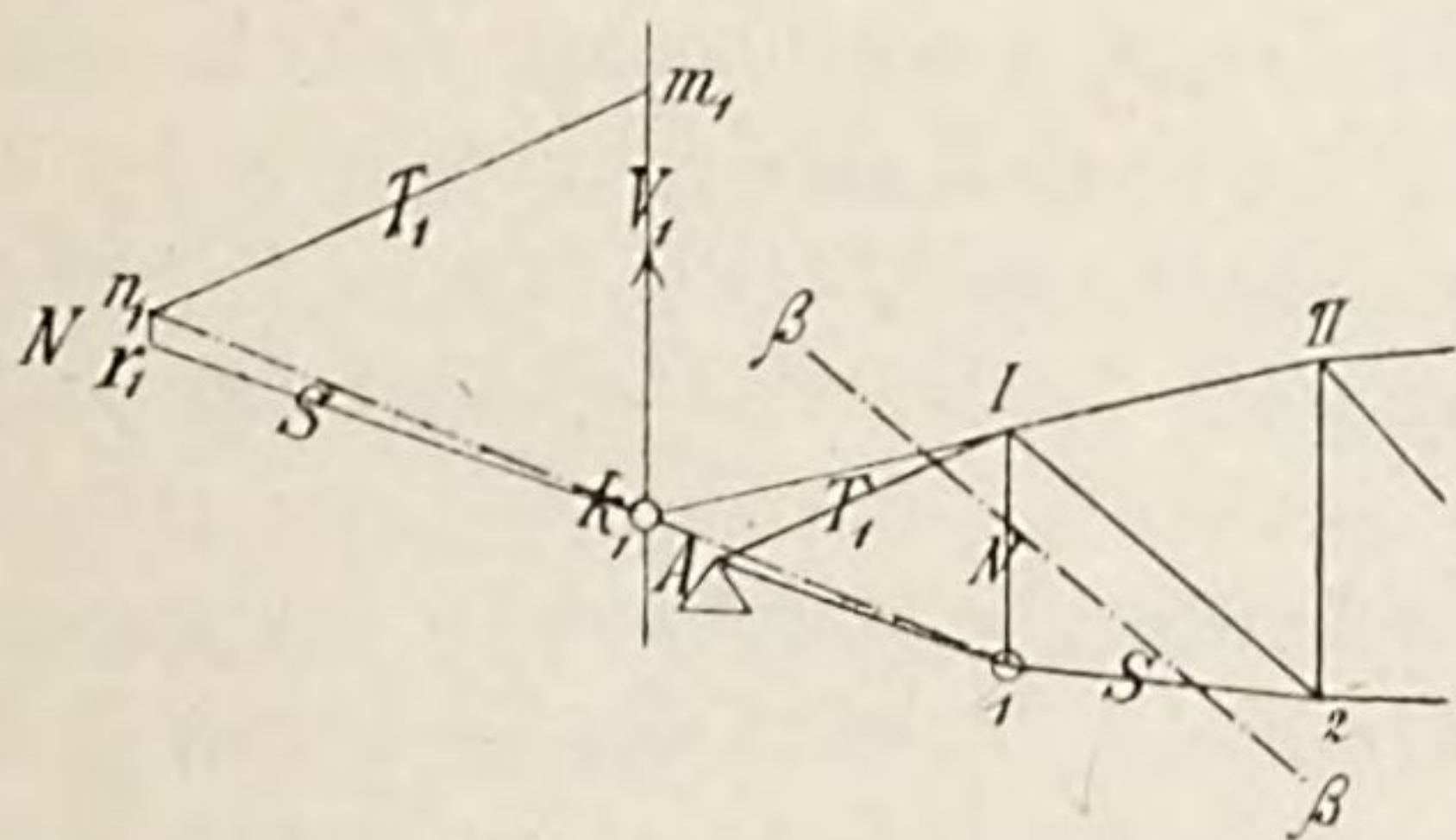


Fig. 61.



Man trägt also km nach Grösse und Richtung gleich V an und zieht durch m mn parallel T , so ist kmn das Kräftedreieck der drei Kräfte V , T , R' , daher T nach Grösse und Richtung gleich mn (Druck), sowie $R' = nk$. Hiemit ist auch $R'' = kn$ gegeben und die Parallelen zu Z und S durch n und k schneiden $Z = nr$ (Zug) und $S = rk$ (Zug) ab.

Um N zu finden, lege man den Schnitt β Fig. 61, bezüglich dessen V_1 die Resultierende der äusseren Kräfte sei. Man vereinigt wie oben V_1 und T_1 zu R' , ferner N und S zu R'' , wobei die Kraftlinie von R' und R'' als Verbindungslinie $k_1 1$ sich ergibt, trägt

$V_1 = k_1 m_1$ auf, so liefert das Kräfteviereck $k_1 m_1 n_1 r_1$: $T_1 = m_1 n_1$ (Druck), $N = n_1 r_1$ (Druck) und $S = r_1 k_1$ (Zug).

Bei vertical belasteten Trägern, welche mit beiden Enden frei aufliegen, sind alle Momente positiv. Es folgt daraus nach den Gleichungen 99 und 100, dass in den Stäben der oberen Gurtung nur Druck, in denjenigen der unteren nur Zug stattfinden kann. Die Beanspruchung eines solchen Gurtstabes wird erhalten, wenn man das Angriffsmoment des dem Stabe gegenüber liegenden Knotenpunktes dividirt durch die senkrechte Entfernung des Stabes von dem betreffenden Knotenpunkte.

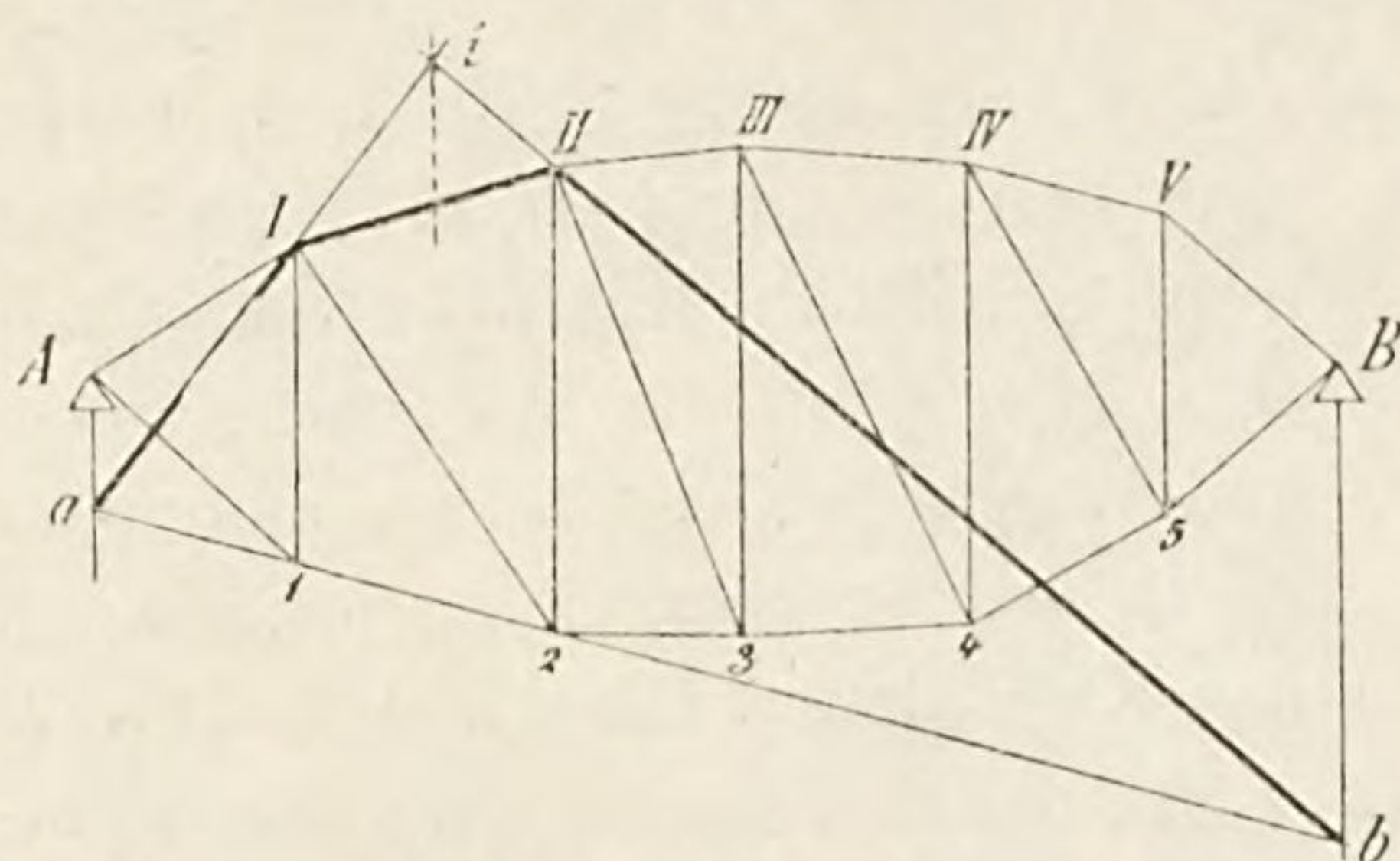
Ungünstigste Belastungen, Methode der Influenzlinien.

Gurtungen. Die Gurtungskräfte sind proportional den Angriffsmomenten der gegenüber liegenden Knotenpunkte. Da in sämtlichen Knotenpunkten die grössten Momente bei totaler Belastung des Trägers auftreten, so findet auch die ungünstigste Beanspruchung der Gurtungen nur bei totaler Trägerbelastung statt.

Füllungsglieder. Es ist leicht nachzuweisen, dass eine Einzellast, welche sich links von dem Felde befindet, welchem ein beliebiges in Betracht gezogenes Füllungsglied, z. B. die Diagonale $I2$ (Fig. 62) angehört, Druck in dieser Diagonale erzeugt, während die Last, rechts von jenem Felde angebracht, Zugspannung in der Diagonale zur Folge hat. Durch vermehrte Belastung des links vom genannten

Felde befindlichen Trägertheils bei nicht belasteter rechtsseitiger Trägerstrecke wird also die Druckspannung in der Diagonale gesteigert werden, durch Vermehrung der rechtsseitigen Belastung aber bei unbelastetem linken Trägertheil die Zugspannung.

Fig. 62.



Es fragt sich nur, wie weit die einseitige Belastung von links oder rechts kommend in das Feld einrücken muss, um in dem zu untersuchenden Stabe das Maximum der Druck- oder Zugbeanspruchung hervorzubringen. Die Frage ist beantwortet, sobald die Stelle bekannt ist, an welche man die Einzellast zu verlegen hat um in dem Stabe die Beanspruchung gleich Null zu erzeugen.

Jene Stelle wird erhalten, wenn man den nicht belasteten Gurt 1 2 des Faches dem der Stab angehört, bis zum Schnitt mit den Auflagerverticalen verlängert und von den Schnittpunkten a und b Verbindungslinien nach den Knotenpunkten I und II des belasteten Gurts zieht. Letztere Verbindungslinien schneiden sich in einem Punkte i der Verticalen, welche durch die Belastungsscheide geht.

Man denke sich nämlich in den Knotenpunkten I und II zwei Lasten Q_1 und Q_2 , deren Grösse, sonst beliebig, in einem derartigen Verhältniss zu einander steht, dass $aIIIb$ das Seilpolygon dieser Lasten bildet. Ist das der Fall, so geht für alle durch das betrachtete Feld gelegten Schnitte die Resultirende der äusseren Kräfte durch den Schnitt der Gurtstäbe III und 1 2, daher die Spannung in der Diagonale gleich Null. Q_1 und Q_2 können aber durch ihre in i wirkende Resultirende ersetzt werden und geht daraus hervor, dass jede in der Verticalen durch i wirkende Einzellast keine Beanspruchung in der Diagonale $I 2$ hervorbringt.*)

In analoger Weise bestimmt sich die Belastungsscheide der Verticalstäbe.

Sind Lasten an den unteren Knotenpunkten bei Anordnung von verticalen Füllungsgliedern angebracht, so ist die obere Gurtung als belastet anzunehmen.

Wenn auf solche Weise festgestellt ist, wie eine gegebene Belastung über dem Träger vertheilt sein muss, um die Maximalbeanspruchungen eines Stabes zu erzeugen, können diese Beanspruchungen entweder durch Rechnung nach S. 68 oder graphisch nach Culmann S. 69 gefunden werden. Ein weiteres graphisches Verfahren zur Lösung der Aufgabe gründet sich auf die Anwendung der sog. Influenzlinien, wie folgt:

Man lasse eine Einzellast P nach und nach alle Stellungen auf dem Träger durchlaufen und bestimme für jede Lage der Last die dadurch bewirkte Beanspruchung eines ins Auge gefassten Stabes. Trägt man diese Stabkräfte an den jeweiligen Angriffsorten der Last als Ordinaten auf, so wird der dadurch entstehende Linienzug die Influenzlinie des betreffenden Fachwerkstabes genannt. Dieselbe verläuft, wenn die Last nur in den Knotenpunkten auf den Fachwerkträger wirken kann, zwischen je zwei Knotenpunkten immer geradlinig, weil die betreffenden Knotendrucke im umgekehrten Verhältniss ihrer Abstände von der Last stehen.

*) Culmann, graphische Statik.

Ist die Influenzcurve eines Fachwerkstabes für die Last P gezeichnet, so sind damit auch die durch jede andere bewegliche Last P_1 entstehenden Stabkräfte bekannt, man erhält dieselben gleich $\frac{P_1}{P} y$, wenn y die Ordinaten der Influenzlinie am jeweiligen Angriffsort von P_1 . Bestimmt man aber die Influenzlinie für die Last $P = 1$, so ergibt sich die von irgend einer anderen Last herrührende Stabkraft, wenn man die Ordinaten der Influenzcurve am Angriffsort der Last mit der Grösse dieser Last multiplicirt. Es kann also auch die Einwirkung eines Systems von Lasten auf den Stab durch Summirung dieser Ordinaten leicht bestimmt werden.

Bei gleichmässig vertheilter Belastung (q pro Längeneinheit) geht man für die Construction der Influenzcurve von der Einzellast $q = 1$ aus, wodurch die Einwirkung der gesamten Belastung auf den Stab als Flächeninhalt der von der Influenzcurve und X-Axe eingeschlossenen Fläche erhalten wird. Die Grenzbeanspruchungen des Stabes durch mobile gleichmässig vertheilte Belastung stellen sich als gesammte positive, beziehungsweise gesammte negative Fläche der Influenzlinie dar.*)

*) Die Methode der Influenzcurven wurde zuerst angewandt von W i n k l e r (Vortrag über die Berechnung der Bogenbrücken, Mitth. d. Arch.- u. Ingen.-Ver. für Böhmen 1868) und M o h r (Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenconstructions, Zeitsch. d. Arch.- u. Ingen.-Vereins zu Hannover 1868 u. 1869). Ueber die weitere Behandlung des Gegenstandes S. F r ä n k e l, Ueber die ungünstigste Einstellung eines Systems von Einzellasten auf Fachwerkträgern mit Hülfe von Influenzlinien, Civilingenieur 1876 und M e l a n, Beitrag zur graphischen Behandlung der Fachwerkträger, Zeitsch. d. Arch. u. Ingen.-Vereins zu Hannover 1880.

IV. Abschnitt.

Dachconstructionen.

§ 1.

Belastung der Dächer a. Eigengewicht eiserner Dächer.

Art des Daches.	Gewicht in <i>kg pro qm</i> geneigter Dachfläche incl. Latten resp. Schalung, Sparren und Pfetten jedoch ohne das Gewicht der Binder.
Glas auf Winkel-, bezw. Sprosseneisen	60
Schiefer auf Winkeleisen	50
Ebenes Eisenblech auf Winkeleisen	22
Ebenes Zinkblech auf Schalung und Profileisen . .	48
Eisenwellenblech auf Winkeleisen	22
Zinkwellenblech auf Winkeleisen	24

b. Schneelast.

Hierüber gilt das Th. II S. 87 Gesagte. Wir nehmen dieselbe rund zu 70 *kg pro qm* an.

c. Winddruck.

Während bei den Holzconstructionen mit Rücksicht auf die Beschaffenheit des Materials, auf den erreichbaren Genauigkeitsgrad und zum Zweck möglicher Vereinfachung der Berechnung die Annahme einer allseitig verticalen Belastung durch Schnee und Wind angezeigt schien, erfordern die Eisendächer ein genaueres Eingehen auf die Wirkungsweise der auftretenden Kräfte. Es wird desshalb hier auch die Möglichkeit der variablen Belastung durch den Schnee in Berücksichtigung gezogen und der Winddruck, wie in Wirklichkeit der Fall, stets einseitig, d. h. nur auf eine der beiden Dachflächen wirkend, in Rechnung gebracht werden.

Man bestimmt (S. Th. II S. 87) den in der Richtung des Windes *pro qm* geneigter Dachfläche wirkenden Winddruck und zerlegt denselben in eine zur Dachfläche senkrechte und eine dazu parallele Componente. Die erstere ist:

$$w = 0,116 v^2 \sin^2 (\alpha + 10) \text{ kg}$$

wobei α den Neigungswinkel des Daches gegen den Horizont und v die Wind-

geschwindigkeit in m pro Sec. bezeichnen. Die andere parallel zur Dachfläche aufwärts wirkende Componente, wegen der Geringfügigkeit der zwischen Luft und Dachfläche stattfindenden Reibung unwirksam bleibend, ist zu vernachlässigen.

Wird $v = 30$ angenommen, so ergeben sich aus obiger Formel nachstehende Werthe w für eine Anzahl verschiedener Dachneigungen α oder Verhältnisse der Firsthöhe h zur Stützweite a :

$\frac{h}{a} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
oder $\alpha = 45^\circ$	$33^\circ 41'$	$26^\circ 34'$	$21^\circ 48'$	$18^\circ 26'$	$15^\circ 57'$	$14^\circ 2'$	$12^\circ 32'$	$11^\circ 18'$
$n = \text{rund } 70$	50	37	29	24	20	17	15	14 kg pro qm.

Man trennt nun zweckmässig die Untersuchung bezüglich der verschiedenen Belastungen und bestimmt besonders die Spannungen, welche in den einzelnen Constructionstheilen erzeugt werden: *a*) durch das Eigengewicht, *b*) durch (totale oder einseitige) Schneelast, *c*) durch Winddruck.

§ 2.

Auflagerreactionen der Balkendächer.

Die Auflagerreactionen, welche durch verticale (totale oder einseitige) Belastung erzeugt werden, findet man auf bekannte Weise wie beim einfachen Tragbalken.

Die Auflagerdrücke der schiefen Windbelastung werden wie folgt bestimmt.

Vom Dachbinder ABC , der in A mit einem beweglichen und in B mit einem unverrückbaren Auflager versehen ist (Fig. 63), sei die Seite AC durch den Winddruck beansprucht, dessen zu AC senkrechte Resultirende mit W_0 bezeichnet werde. Die Reibung am beweglichen Auflager kann, ohne einen grossen Fehler zu begehen, vernachlässigt werden, in welchem Falle die Auflagerreaction D_1 daselbst vertical wirkend auftritt. Da der Winddruck gegen den Horizont geneigt ist, so kann nur Gleichgewicht stattfinden, wenn auch die rechtsseitige Widerlagerreaction D_2 eine geneigte Lage einnimmt und sollen deren Horizontal- und Verticalprojection mit H und D'_2 bezeichnet werden. Aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$W_0 \sin \alpha - H = 0$$

$$D_1 - W_0 \cos \alpha + D'_2 = 0$$

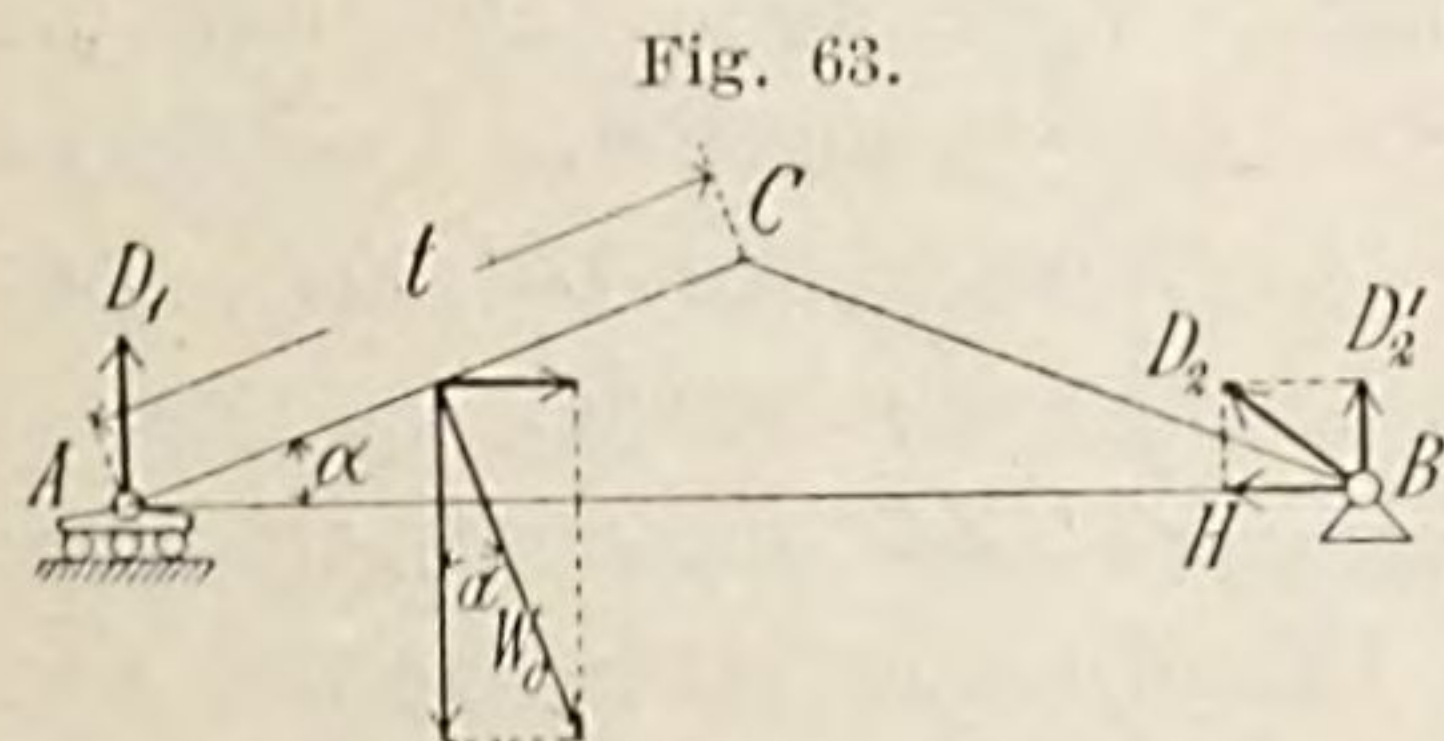
und $D'_2 \cdot 2 l \cos \alpha - W_0 \cdot \frac{l}{2} = 0$

ergeben sich sodann die Unbekannten:

$$H = W_0 \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

$$D'_2 = \frac{W_0}{4 \cos \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

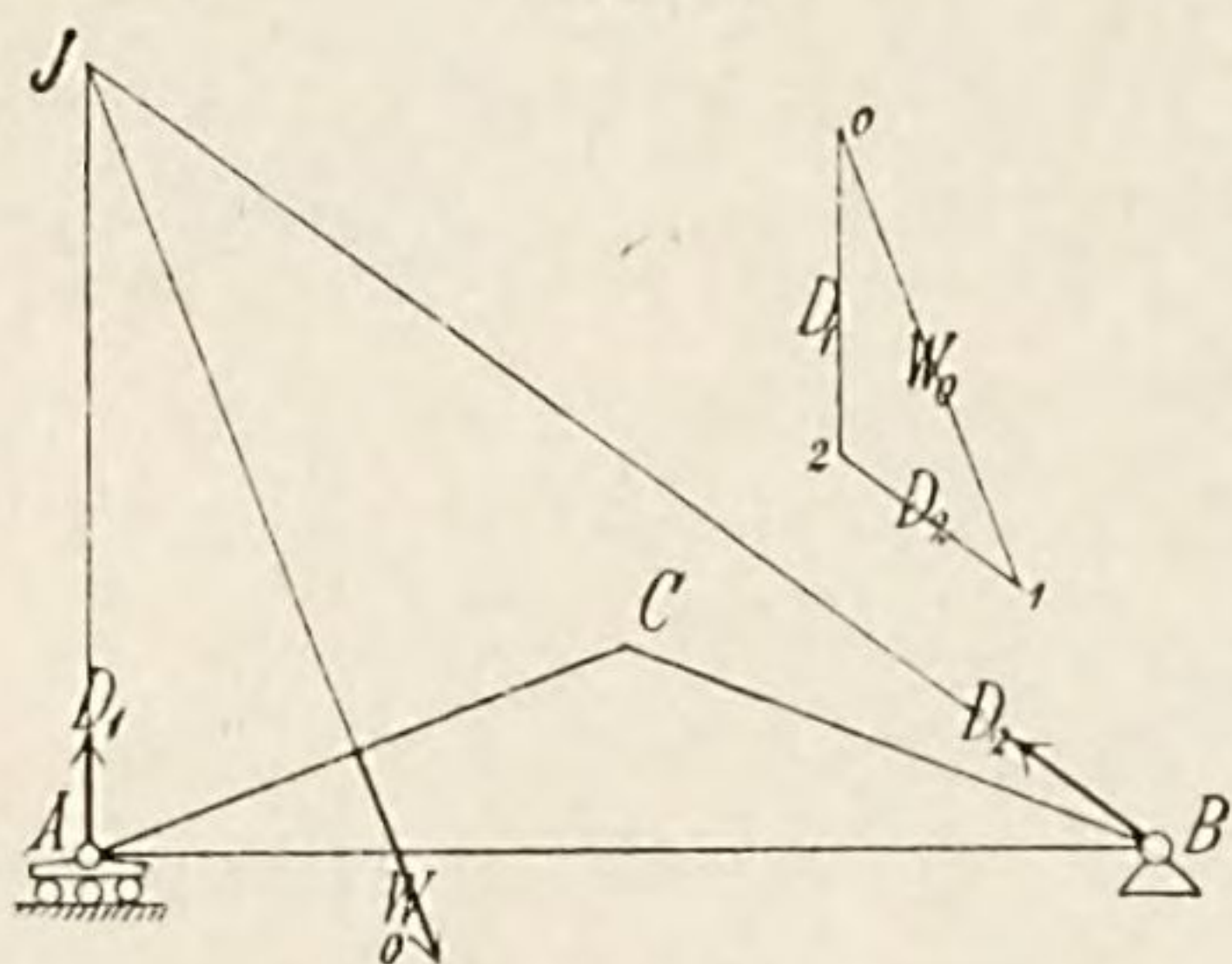
und $D_1 = \frac{W_0 \cos \alpha}{4} (3 - \tan^2 \alpha)$. . . (105)



Graphische Lösung. Die Kräfte W_0 , D_1 und D_2 , welche sich im Gleichgewicht halten, schneiden sich in einem Punkt J (Fig. 64). Indem man daher 01 nach Grösse und Richtung gleich W_0 aufträgt und durch 0 eine Verticale, ferner durch 1 eine Parallele zur Verbindungslinie BJ zieht, erhält man $D_1 = 20$ und $D_2 = 12$.

Ist durch den Wind die Dachfläche CB auf Seite des festen Auflagers beansprucht (Fig. 65), so sind die Gleichgewichtsbedingungen:

Fig. 64.



$$W_0 \sin \alpha - H = 0$$

$$D_1 - W_0 \cos \alpha + D'_2 = 0$$

$$D_1 \cdot 2l \cos \alpha - W_0 \frac{l}{2} = 0,$$

$$\text{woraus: } H = W_0 \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (106)$$

$$D_1 = \frac{W_0}{4 \cos \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (107)$$

$$D'_2 = \frac{W_0 \cos \alpha}{4} (3 - \tan^2 \alpha) \quad . \quad . \quad (108)$$

D_1 und D'_2 wechseln die Werthe und H erhält entgegengesetzte Richtung gegenüber dem vorigen Fall.

Durch Auftragen von $W_0 = 01$ (Fig. 65) und durch Ziehen der Verticalen 12 und der Parallelen 02 zu BJ wird auf graphischem Wege $D_1 = 12$ und $D_2 = 20$ nach Grösse und Richtung erhalten.

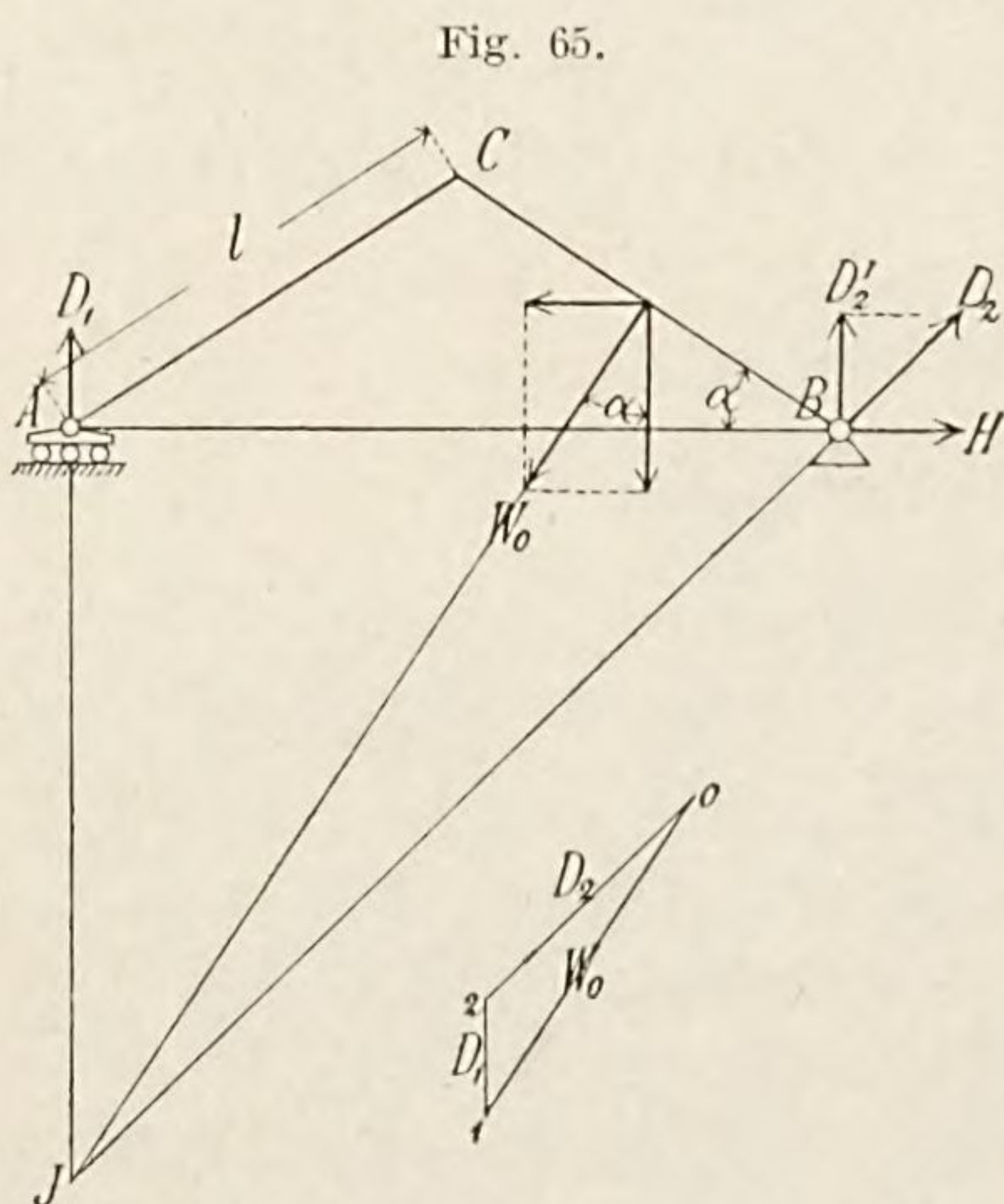
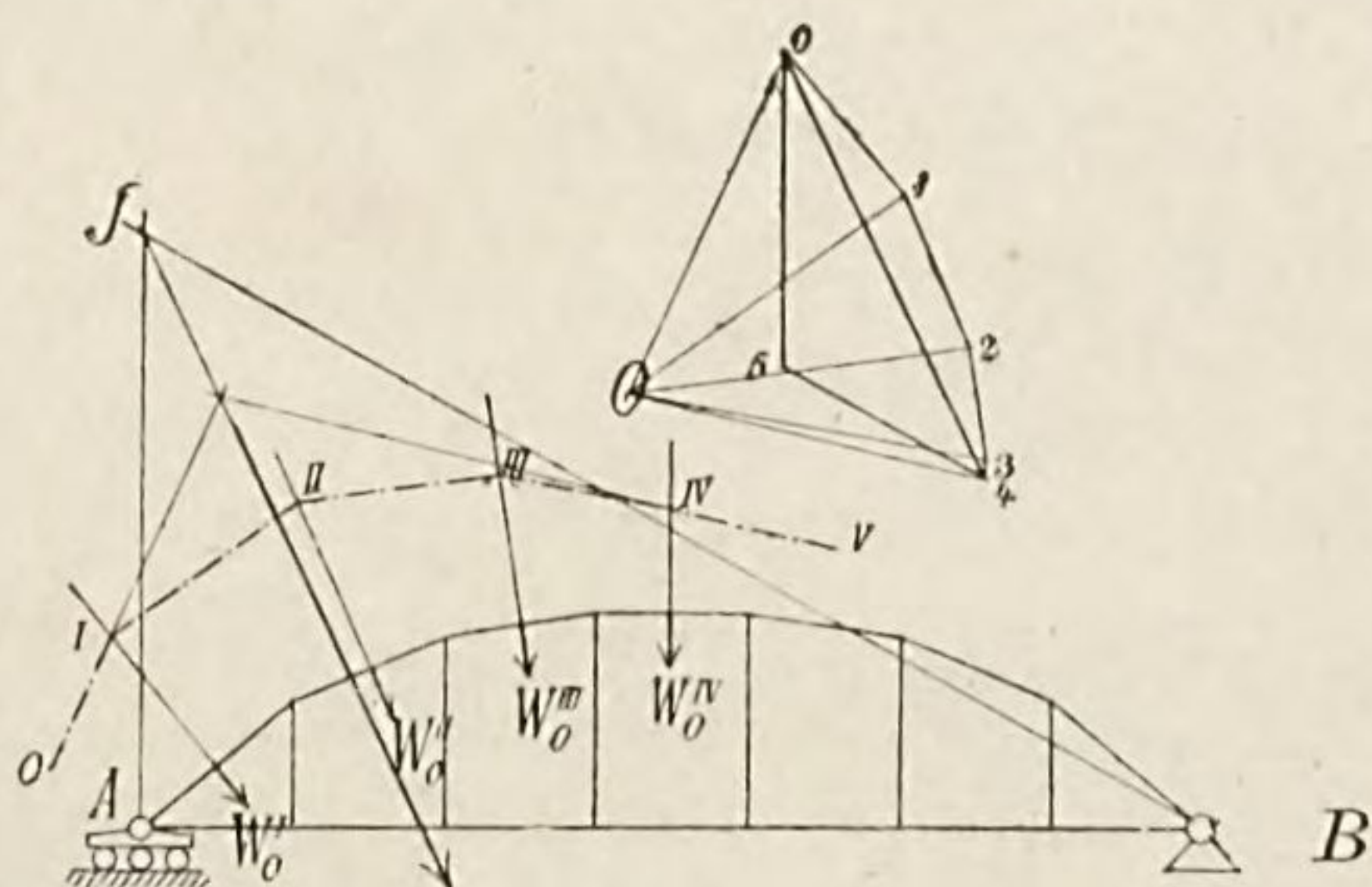


Fig. 66.



B

Bei gekrümmter Dachfläche haben die Normalcomponenten des Winddrucks an verschiedenen Stellen verschiedene Richtungen. Man zerlegt daher die Begrenzungslinie des Daches in mehrere Abtheilungen, bestimmt die Winddrücke für dieselben unter Zugrundlegung eines mittleren Neigungswinkels und erhält nach Gleichungen 103 bis 105 Horizontal Schub und resultirende Verticalauflagerreactionen durch Summierung der den einzelnen Abtheilungen entsprechenden Werthe von H , D_1 und D'_2 .

Vorzuziehen ist hier das einfachere graphische Verfahren. Die auf die einzelnen Abtheilungen der Dachfläche wirkenden Winddrücke W_0^I , W_0^{II} , W_0^{III} und W_0^{IV} (Fig. 66) werden zu einem Kräftezug 01234 vereinigt, wodurch deren Resultirende nach Grösse und Richtung gleich 04 erhalten wird. Die Lage dieser Resultirenden ergibt sich

mittels des, dem beliebigen Pol 0 entsprechenden Seilpolygons $0 I II III IV V$, so dass jetzt durch Ziehen der Verticalen 05 im Kräftepolygon und der Parallelen 45 zu BJ $D_1 = 50$ und $D_2 = 45$ bestimmt ist. Analog ist das Verfahren, wenn diejenige Dachhälfte durch den Wind belastet ist, auf deren Seite das feste Auflager sich befindet.

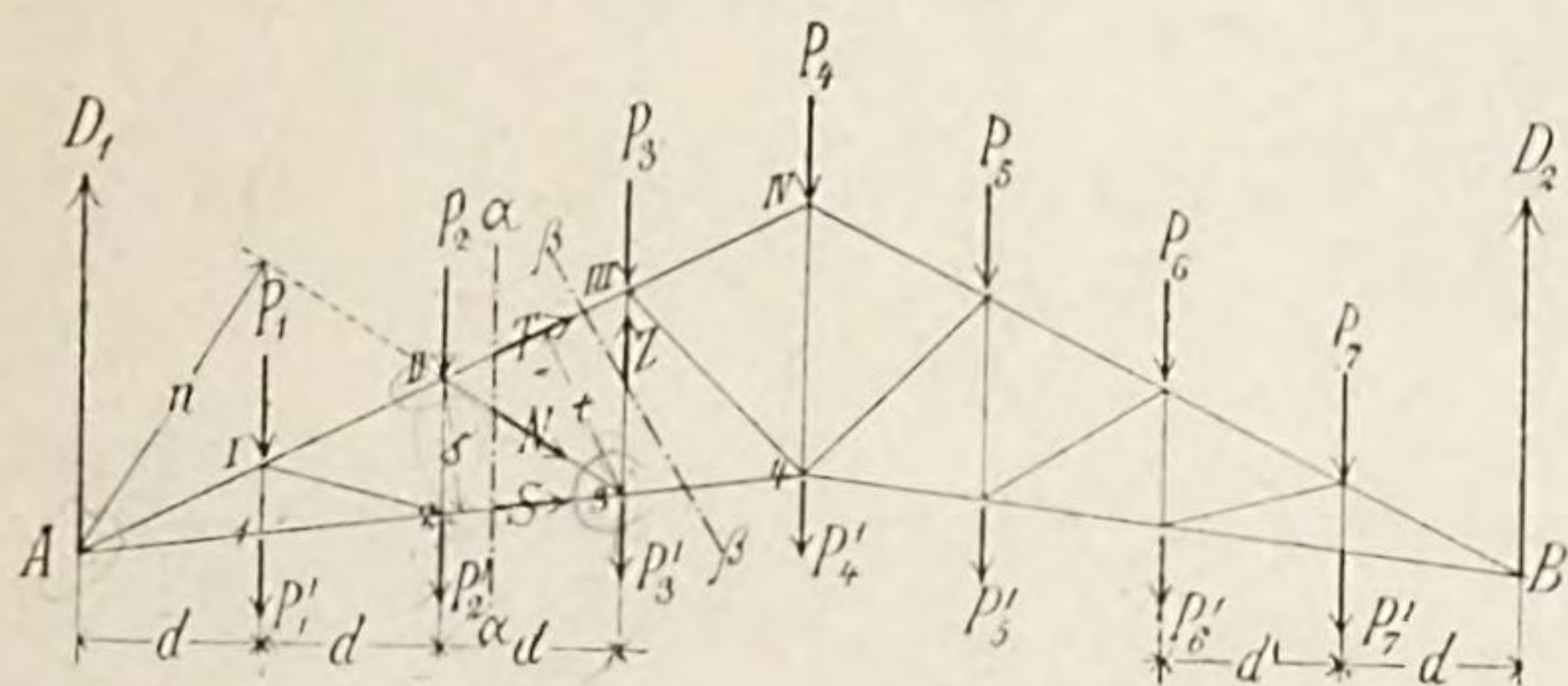
§ 3.

Dachbinder nach dem englischen System.

A. Beanspruchung durch Eigengewicht.

Es wird angenommen, dass das Eigengewicht in Form von concentrirten Kräften in den Knotenpunkten des Dachbinders wirke und in solcher Weise sowohl auf die oberen als auf die unteren Knotenpunkte entsprechend vertheilt sei. Hienach seien $P_1, P_2, P_3 \dots$ die in den oberen Knotenpunkten des Dachbinders (Fig. 67) an-

Fig. 67.



greifenden Lasten. Rechnerisch erhält man die durch diese Belastung entstehenden Stabkräfte für jedes beliebige Feld durch geführte Schnitte mittels der Momentenmethode nach S. 68 wie folgt:

Schnitt α , Momentenpunkt 3:

$$D_1 \cdot 3d - (P_1 + P_1') \cdot 2d - (P_2 + P_2') \cdot d + T \cdot t = 0$$

$$T = - \frac{D_1 \cdot 3d - (P_1 + P_1') \cdot 2d - (P_2 + P_2') \cdot d}{t} \quad \dots \quad (109)$$

Schnitt α , Momentenpunkt II:

$$D_1 \cdot 2d - (P_1 + P_1') \cdot d - S \cdot s = 0$$

$$S = \frac{D_1 \cdot 2d - (P_1 + P_1') \cdot d}{s} \quad \dots \quad (110)$$

Schnitt α , Momentenpunkt A:

$$(P_1 + P_1') \cdot d + (P_2 + P_2') \cdot 2d + N \cdot n = 0$$

$$N = - \frac{(P_1 + P_1') \cdot d + (P_2 + P_2') \cdot 2d}{n} \quad \dots \quad (111)$$

Schnitt β , Momentenpunkt A:

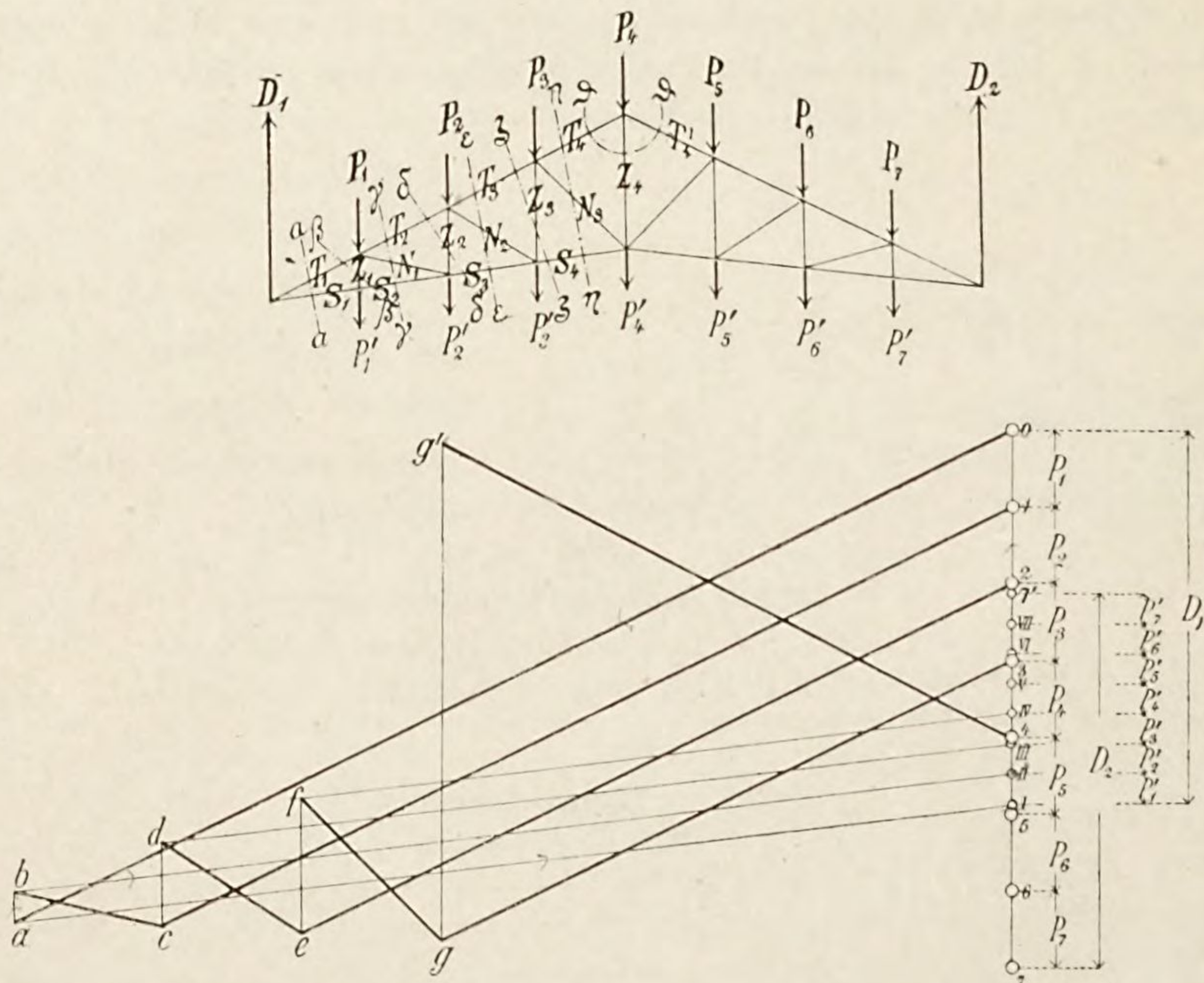
$$(P_1 + P_1') \cdot d + (P_2 + P_2') \cdot 2d + P_3' \cdot 3d - Z \cdot 3d = 0$$

$$Z = + \frac{(P_1 + P_1') \cdot d + (P_2 + P_2') \cdot 2d + P_3' \cdot 3d}{3d} \quad \dots \quad (112)$$

Graphische Bestimmung der Stabkräfte. Man trägt (Vgl. Th. II S. 99) die den Dachbinder angreifenden äusseren Kräfte in derselben Reihenfolge, in welcher sie an dem Umfang desselben wirken, zu einem Kräftezug zusammen, so dass $01 = P_1$, $12 = P_2 \dots 67 = P_7$, $77' = D_2$, $7'VII = P_7'$, $VII VI = P_6'$, $VI V = P_5' \dots III = P_1'$ endlich $I0 = D_1$ (Fig. 68). Dann legt man eine Reihe von Schnitten, bringt die an den dadurch gebildeten Trägerfragmenten befindlichen äusseren und inneren Kräfte ins Gleichgewicht und erhält aus den hiebei gebildeten Kräftepolygonen die unbekannten Stabkräfte. Die Anwendbarkeit des Verfahrens hängt von der Möglichkeit ab, die Schnitte so zu führen, dass immer nur zwei Constructionstheile mit unbekannten Spannungen getroffen werden, was in vielen Fällen (Ausnahme S. § 4) durch entsprechende Aufeinanderfolge der Schnitte

erreicht werden kann. Die Schnitte können auch beliebig krummlinig sein, da auch für solche die dem Verfahren zu Grunde gelegte Anschauungsweise Gültigkeit behalten muss. Im vorliegenden Falle ergeben sich mittels der Schnitte α bis ϑ die Stabkräfte in nachstehender Weise:

Fig. 68.



Schnitt α .
 Bekannt: $D_1 = 10$,
 unbekannt: T_1, S_1 .
 Polygon: $I 0 a I$,
 daher: $T_1 = 0 a$ (Druck)
 $S_1 = a I$ (Zug).
 Schnitt β .
 Bekannt: $\begin{cases} D_1 - P_1' = II 0 \\ T_1 = 0 a, \end{cases}$
 unbekannt: Z_1, S_2 .
 Polygon: $II 0 a b II$,
 daher: $Z_1 = a b$ (Zug)
 $S_2 = b II = a I$ (Zug).
 Schnitt γ .
 Bekannt: $\begin{cases} D_1 - (P_1 + P_1') = III 1 \\ S_2 = b II, \end{cases}$
 unbekannt: T_2, N_1 .
 Polygon: $II 1 c b II$,
 daher: $T_2 = 1 c$ (Druck)
 $N_1 = c b$ (Druck).

Schnitt δ .
 Bekannt: $\begin{cases} D_1 - (P_1 + P_1' + P_2') = III 1 \\ T_2 = 1 c, \end{cases}$
 unbekannt: Z_2, S_3 .
 Polygon: $III 1 c d III$,
 daher: $Z_2 = c d$ (Zug)
 $S_3 = d III$ (Zug).

Schnitt ϵ .
 Bekannt: $\begin{cases} D_1 - (P_1 + P_2 + P_1' + P_2') = III 2 \\ S_3 = d III, \end{cases}$
 unbekannt: T_3, N_2 .
 Polygon: $III 2 e d III$,
 daher: $T_3 = 2 e$ (Druck)
 $N_2 = e d$ (Druck).

	Schnitt ζ		Schnitt η .
Bekannt:	$\begin{cases} D_1 - (P_1 + P_2 + P_1' + \\ \quad P_2' + P_3') = IV\ 2 \\ T_3 = 2\ e, \end{cases}$	Bekannt:	$\begin{cases} D_1 - (P_1 + P_2 + P_3 + P_1' \\ \quad + P_2' + P_3') = IV\ 3 \\ S_4 = f\ IV, \end{cases}$
unbekannt:	$Z_3, S_4.$	unbekannt:	$T_4, N_3.$
Polygon:	$IV\ 2\ ef\ IV,$	Polygon:	$IV\ 3\ gf\ 4,$
daher:	$Z_3 = ef\ (\text{Zug})$ $S_4 = f\ IV\ (\text{Zug}).$	daher:	$T_4 = 3\ g\ (\text{Druck})$ $N_3 = gf\ (\text{Druck}).$

Schnitt ϑ .

Bekannt:	$\begin{cases} P_4 = 3\ 4 \\ T_4 = 3\ g \\ T_4' = 4\ g', \end{cases}$
unbekannt:	$Z_4.$
Polygon:	$3\ 4\ g'\ g\ 3,$
daher:	$Z_4 = g'\ g\ (\text{Zug}).$

Die Stabkräfte der rechtsseitigen Trägerhälfte sind gleich den entsprechenden der linken Trägerhälfte. Aus der Construction geht unmittelbar hervor, dass die Spannungen in den Gurtungsstäben bei gleichbleibenden übrigen Verhältnissen sich verringern, wenn der Neigungswinkel der oberen Gurtung gegen den Horizont wächst, dass dagegen mit zunehmender Neigung der unteren Gurtung, wodurch der Vorthail verminderter Länge der Füllungsglieder gewonnen wird, diese Spannungen vergrößert werden.

B. Beanspruchung durch Schneelast.

Die Schneelast, welche selbstverständlich nur in der oberen Gurtung des Dachbinders als angreifend zu betrachten ist, kann sich sowohl über die ganze Dachfläche als auch nur über einzelne Theile derselben erstrecken. Es handelt sich also darum zu untersuchen, welche Lastvertheilung für die einzelnen Constructionstheile die gefährlichste ist.

Was S. 69 für Fachwerkträger von beliebiger Form gezeigt wurde, gilt auch hier: Die Stabkräfte in der oberen und unteren Gurtung sind proportional den Angriffsmomenten der den betreffenden Stäben gegenüberliegenden Knotenpunkte und erreichen ihre Maximalwerthe, wenn in genannten Knotenpunkten die grössten Momente auftreten. Bei totaler Belastung des Trägers findet somit die ungünstigste Beanspruchung der Gurtungen statt.

Was die Füllungsglieder anlangt, so wurde S. 70 nachgewiesen, dass die Maximalbeanspruchung derselben bei bestimmter partieller Belastung des Trägers stattfindet. Hier beim Fachwerkträger, dessen Gurtungen aus je zwei, in den Auflagerpunkten sich schneidenden Geraden bestehen, tritt der besondere Fall ein, dass z. B. auf die Stabkräfte N und Z Fig. 67, wie schon aus den Gleichungen 111 und 112 ersichtlich, die rechts von den betreffenden Schnitten befindlichen Lasten keinen Einfluss haben.

Allgemeiner geht dies aus der Betrachtung des Einflusses einer Einzelast auf einen beliebigen Stab hervor, je nachdem sie verschiedene Lagen gegenüber dem Felde einnimmt, welchem der Stab angehört.

Diagonalen. Man betrachte eine beliebige Diagonale $II3$, der linken Trägerhälfte, welche gegen die Trägermitte fallend angeordnet ist. Befindet sich eine Einzellast P links von dem Felde, dem die Diagonale angehört, oder an der Grenze derselben, wie in Fig. 69, so wird, da die Momentengleichung bezüglich des Drehpunktes A :

Fig. 69.

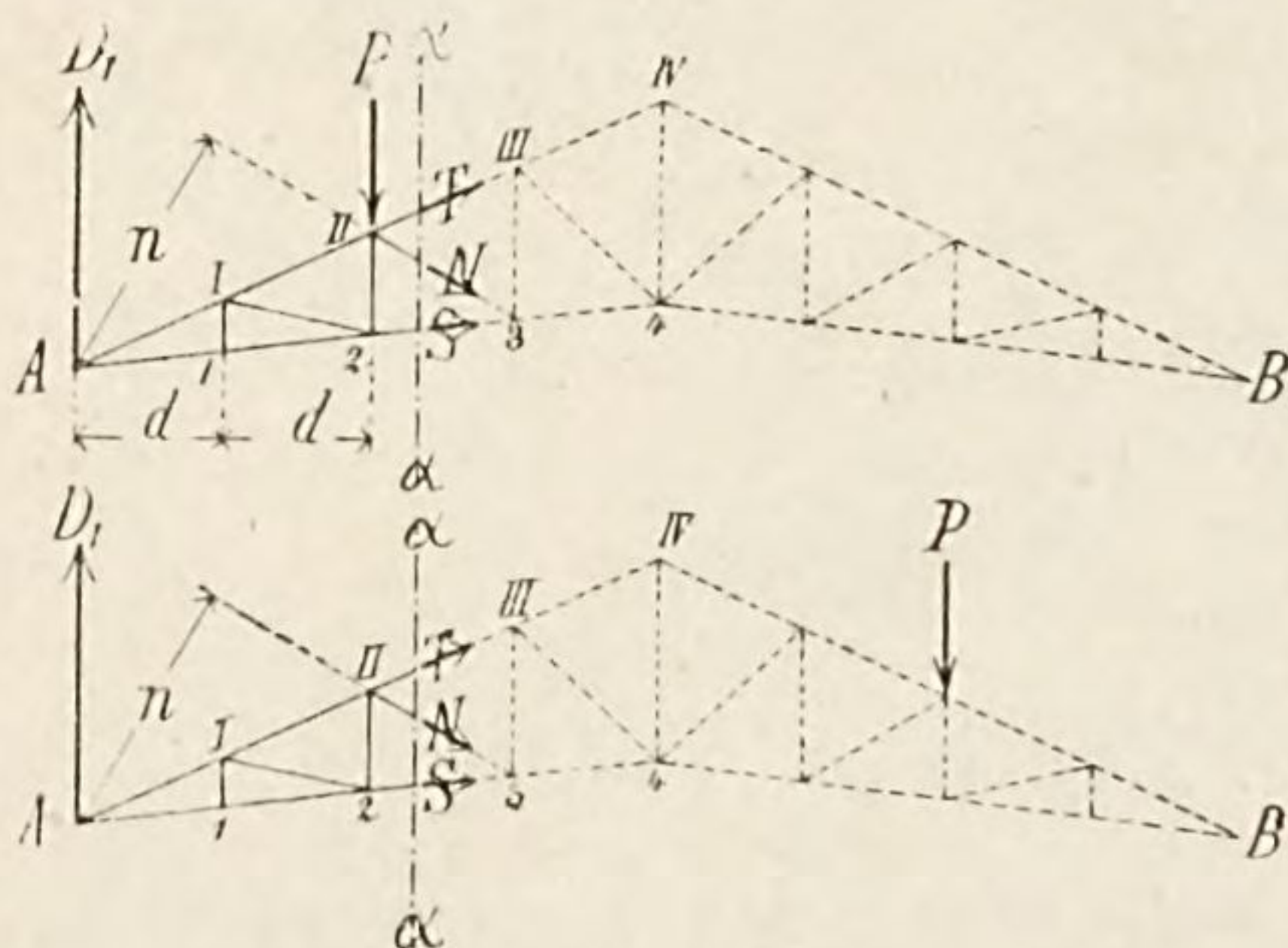


Fig. 70.

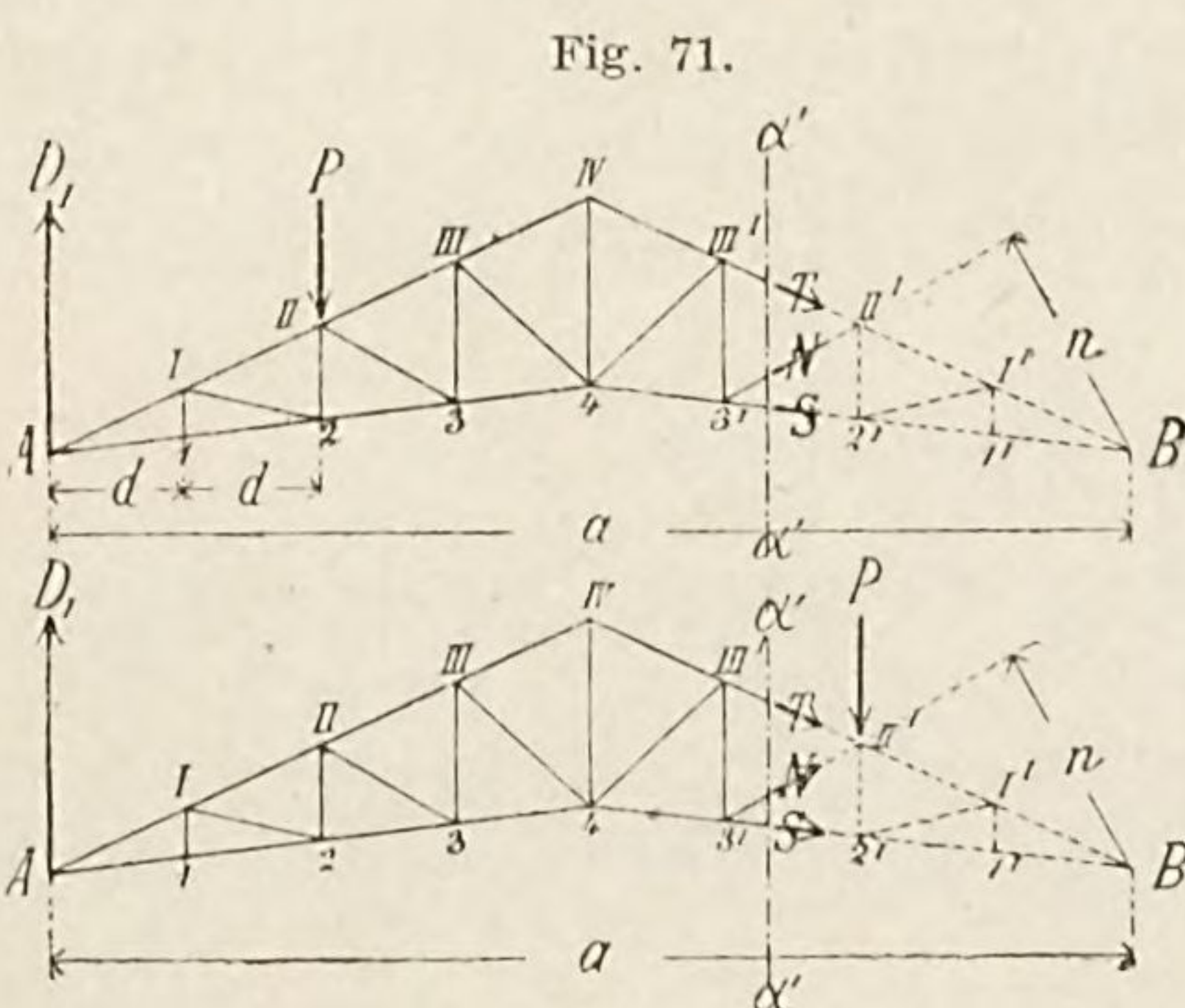
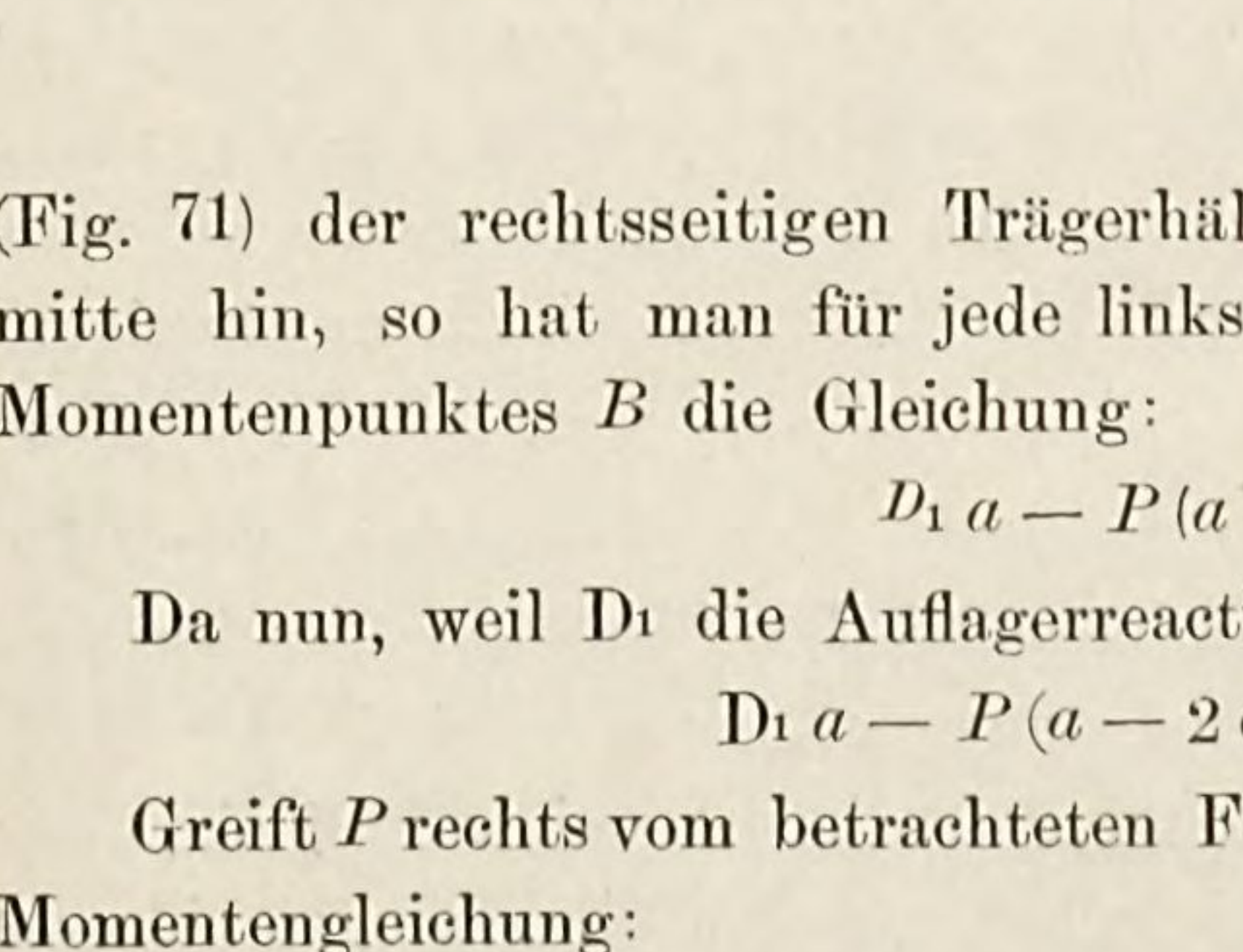


Fig. 71.



(Fig. 71) der rechtsseitigen Trägerhälfte an, und fällt dieselbe gegen die Trägermitte hin, so hat man für jede links von III' befindliche Last P bezüglich des Momentenpunktes B die Gleichung:

$$D_1 a - P(a - 2d) + Nn = 0.$$

Da nun, weil D_1 die Auflagerreaction von P in A ,

$$D_1 a - P(a - 2d) = 0, \text{ so ist } N = 0.$$

Greift P rechts vom betrachteten Feld $III' II'$ an (Fig. 72) so ergibt sich aus der Momentengleichung:

$$D_1 a + N \cdot n = 0$$

$$N = - \frac{D_1 \cdot n}{a},$$

d. h. rechts von dem Feld, dem die Diagonale angehört, bewirkt P Druck und ein Gleiches gilt, wenn sie innerhalb des Feldes sich befindet: Die Belastungsscheide ist hier III' .

$$Nn + P \cdot 2d = 0,$$

in der Diagonale die Druckkraft $N = - \frac{P \cdot 2d}{n}$ erzeugt.

Dasselbe gilt auch für alle mögliche Stellungen, welche die Last innerhalb des Feldes $II III$ annehmen kann, denn an die Stelle von P tritt dann der linksseitige Knotendruck dieser Last.

Befindet sich die Einzellast P aber rechts vom Felde $II III$ (Fig. 70), so wirkt an dem links vom Schnitt befindlichen Trägerfragment ausser den Stabkräften N , S , T , nur die Auflagerreaction D_1 , und ist sonach, da für den Drehpunkt A die Momentengleichung:

$$Nn = 0,$$

die Stabkraft $N = 0$.

Jede links vom Knotenpunkt III , welcher für die Diagonale $II3$ die Belastungsscheide bildet, aufgebrachte Einzellast erzeugt also in der Diagonale Druckspannung, während alle rechts von III befindlichen Lasten keine Wirkung auf den Diagonalstab äussern. Dies gilt indessen nur für die Diagonalen der linken Trägerhälfte. Gehört die Diagonale, wie z. B. $II' 3'$

Demnach gilt für Diagonalen, welche gegen die Trägermitte fallend angeordnet sind Folgendes:

a) linksseitige Trägerhälfte: Jede links von der Belastungsscheide befindliche Einzellast erzeugt in der Diagonale Druck, jede rechts davon befindliche lässt dieselbe spannungslos

b) rechtsseitige Trägerhälfte: Jede links von der Belastungsscheide befindliche Last lässt die Diagonale spannungslos, jede rechts befindliche Last erzeugt Druck.

Sind die Diagonalen gegen die Trägermitte hin steigend angeordnet, so gelten die gleichen Resultate mit dem Unterschied, dass statt Druck überall Zug zu setzen ist.

Verticalstäbe. Für die verticalen Füllungsglieder erhält man auf Grund der gleichen Betrachtungsweise das nämliche Gesetz, nur ist der Sinn der Beanspruchung der Verticalen immer demjenigen der angrenzenden Diagonalen entgegengesetzt.

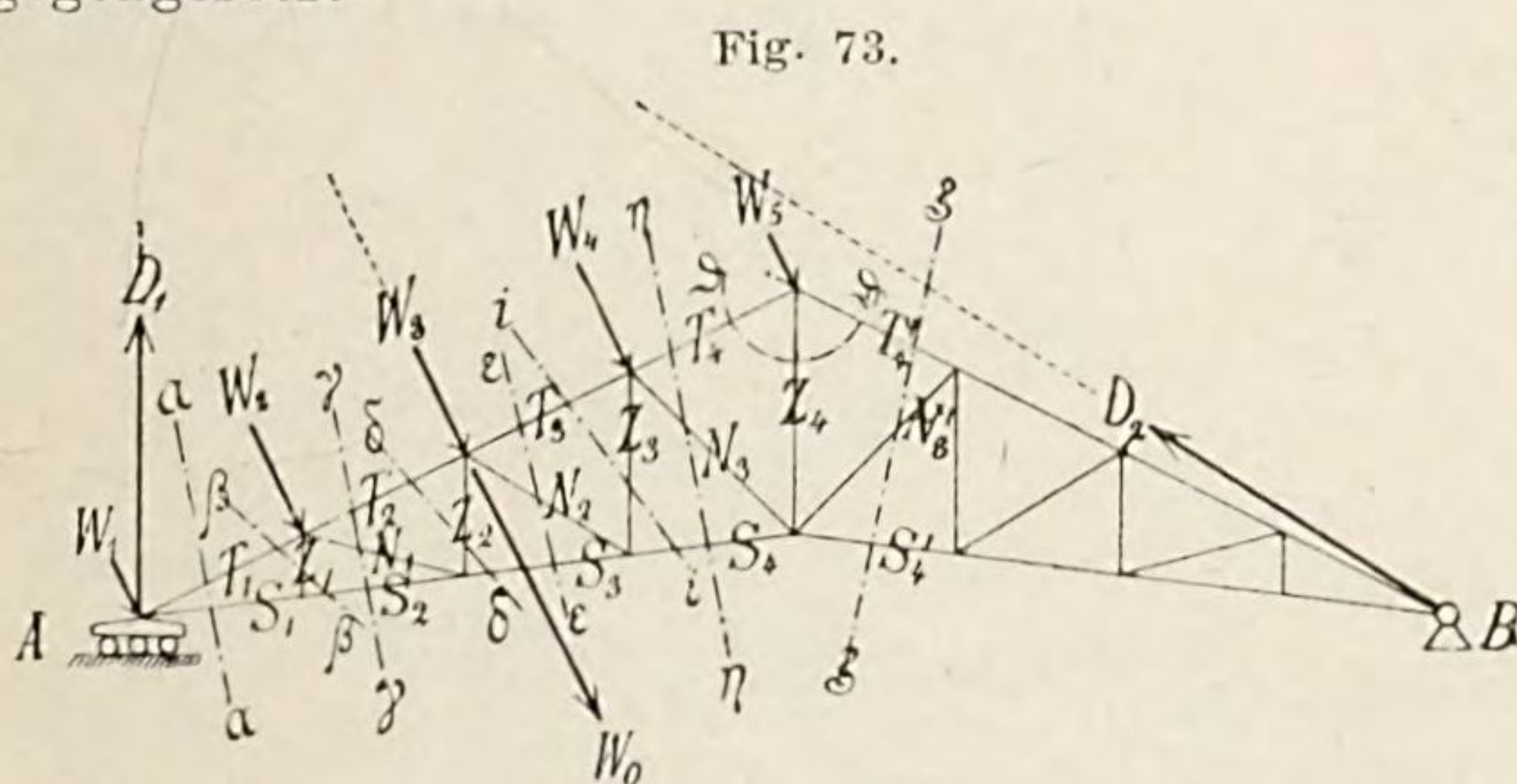


Fig. 73.

Zwischenraum. Die ungünstigste Angriffnahme irgend eines Füllungsgliedes findet also jederzeit bei einseitiger Trägerbelastung statt. Da aber die Belastung der übrigen Trägertheile keinen Einfluss auf die betreffende Stabspannung äussert, so kann man auch sagen:

Die ungünstigste Beanspruchung sämtlicher Füllungsglieder des Dachbinders nach dem englischen System oder überhaupt jedes Dachbinders mit geraden, in den Auflagerpunkten sich schneidenden Gurtungen tritt bei totaler Belastung des Trägers ein.

Demnach kann die Ermittlung der durch die Schneelast hervorgerufenen maximalen Beanspruchungen sämtlicher Stäbe unter Zugrundlegung einer totalen Belastung des Trägers vorgenommen werden.

C. Beanspruchung durch Winddruck.

Der Dachbinder Fig. 73 mit einem beweglichen Auf-

lager in A und einem festen in B sei auf der Seite des beweglichen Auflagers durch den Wind beansprucht. Die auf die einzelnen Knotenpunkte

Fig. 73 a.

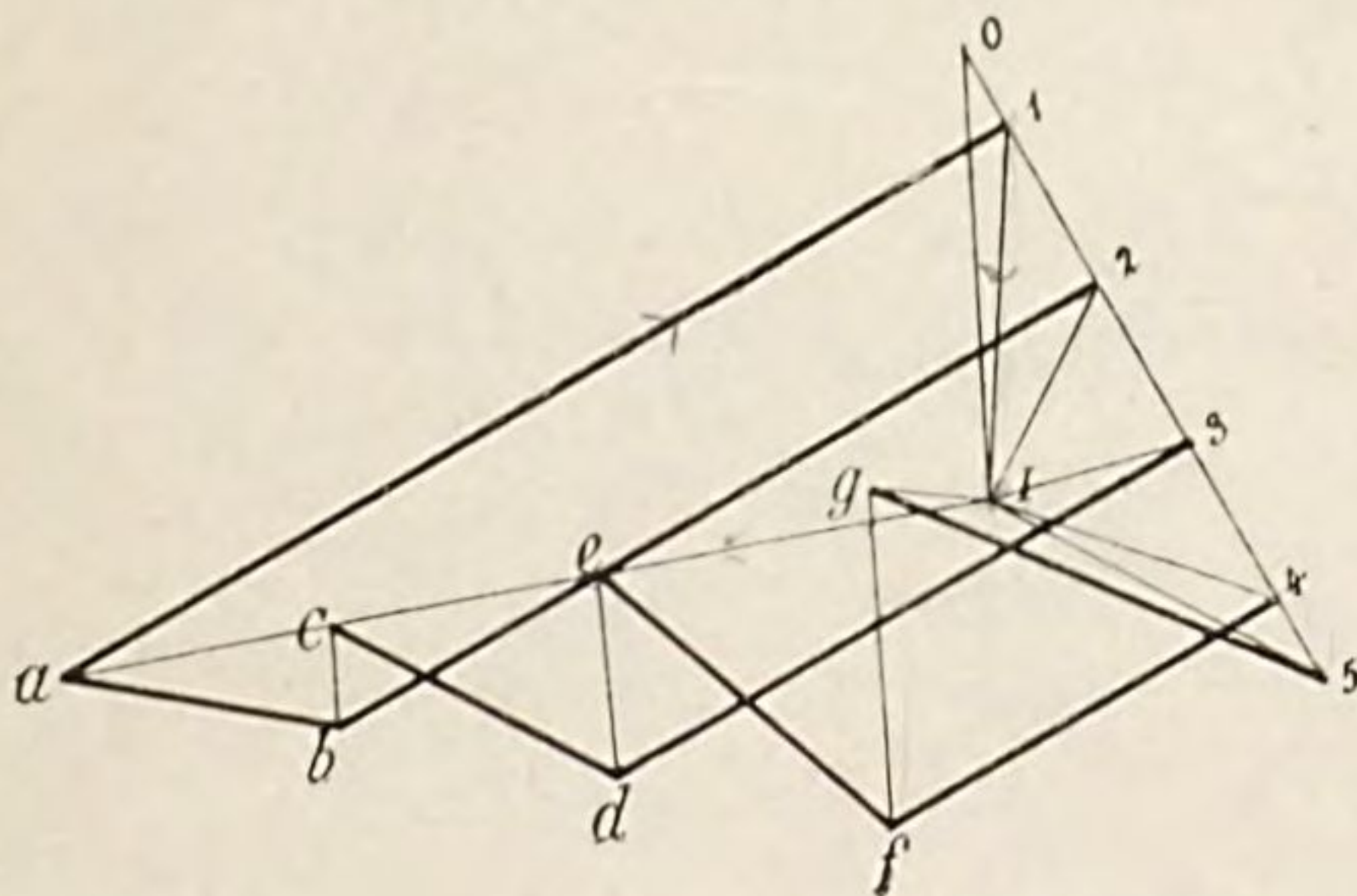
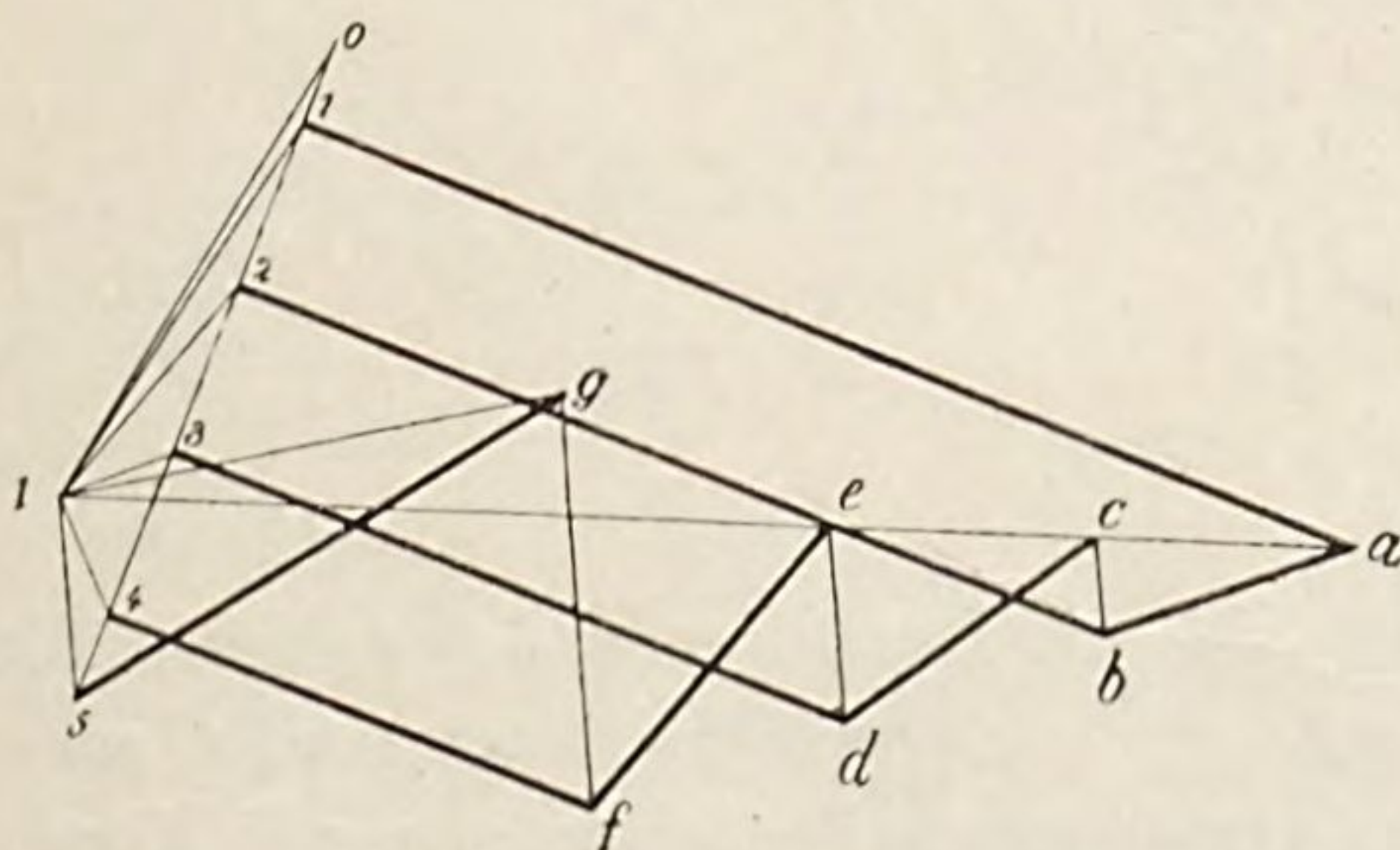


Fig. 73 b.



vertheilten Drücke seien $W_1 = 0\ 1$, $W_2 = 1\ 2 \dots W_5 = 4\ 5$, demnach die Resultirende $W_0 = 0\ 5$ Fig. 73 a, deren Zerlegung in die Auflagerreactionen $D_1 = 1\ 0$ und $D_2 = 5\ I$ nach S. 74 erfolgt. Mit Hülfe der aufeinander folgenden Schnitte α bis ζ ergeben sich aus Fig. 73 a sämtliche Stabkräfte:

Schnitt α .

Bekannt: Result. d. äuss. Kr. $= I\ 1$,
 unbekannt: T_1, S_1 .
 Polygon: $I\ 1\ a\ I$,
 daher: $T_1 = 1\ a$ (Druck)
 $S_1 = a\ I$ (Zug).

Schnitt β .

Bekannt: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Result. d. äuss. Kr.} = I\ 1 \\ T_1 = 1\ a, \end{array} \right.$
 unbekannt: Z_1, S_2 .
 Polygon: $I\ 1\ a\ I$,
 daher: $Z_1 = 0$
 $S_2 = a\ I = S_1$ (Zug).

Schnitt γ .

Bekannt: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Result. d. äuss. Kr.} = I\ 2 \\ S_2 = a\ I, \end{array} \right.$
 unbekannt: T_2, N_1 .
 Polygon: $a\ I\ 2\ b\ a$,
 daher: $T_2 = 2\ b$ (Druck)
 $N_1 = b\ a$ (Druck).

Schnitt δ .

Bekannt: Result. d. äuss. Kr. $= I\ 2$
 $T_2 = 2\ b$,
 unbekannt: Z_2, S_3 .
 Polygon: $I\ 2\ b\ c\ I$,
 daher: $Z_2 = b\ c$ (Zug)
 $S_3 = c\ I$ (Zug).

Schnitt ϵ .

Bekannt: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Result. d. äuss. Kr.} = I\ 3 \\ S_3 = c\ I, \end{array} \right.$
 unbekannt: T_3, N_2 .
 Polygon: $c\ I\ 3\ d\ c$,
 daher: $T_3 = 3\ d$ (Druck)
 $N_2 = d\ c$ (Druck).

Schnitt ι .

Bekannt: Result. d. äuss. Kr. $= I\ 3$
 $T_3 = 3\ d$,
 unbekannt: Z_3, S_4 .
 Polygon: $I\ 3\ d\ e\ I$,
 daher: $Z_3 = d\ e$ (Zug)
 $S_4 = e\ I$ (Zug).

Schnitt η .

Bekannt: Result. d. äuss. Kr. $= I\ 4$
 $S_4 = e\ I$,
 unbekannt: T_4, N_3 .
 Polygon: $I\ 4\ f\ e\ I$,
 daher: $T_4 = 4\ f$ (Druck)
 $N_3 = f\ e$ (Druck).

Schnitt ϑ .

Bekannt: $\left\{ \begin{array}{l} W_5 = 4\ 5 \\ T_4 = f\ 4, \end{array} \right.$
 unbekannt: T_4', Z_4 .
 Polygon: $f\ 4\ 5\ g\ f$,
 daher: $T_4' = 5\ g$ (Druck)
 $Z_4 = g\ f$ (Zug).

Schnitt ζ .

Bekannt: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Result. d. äuss. Kr.} = I\ 5 \\ T_4' = 5\ g. \end{array} \right.$
 unbekannt: N_3', S_4' .
 Polygon: $I\ 5\ g\ I$,
 daher: $N_3' = 0$
 $S_4' = g\ I$ (Zug).

Für alle folgenden Schnitte ändert sich die Resultirende der äusseren Kräfte nicht mehr, wesshalb die Gurtungskräfte der rechtsseitigen Trägerhälfte constant (gleich $5\ g$ beziehungsweise $g\ I$) und die Spannungen in den Diagonalen und Verticalen gleich Null sind. Wie schon erwähnt, besteht, wenn man die rechtsseitigen

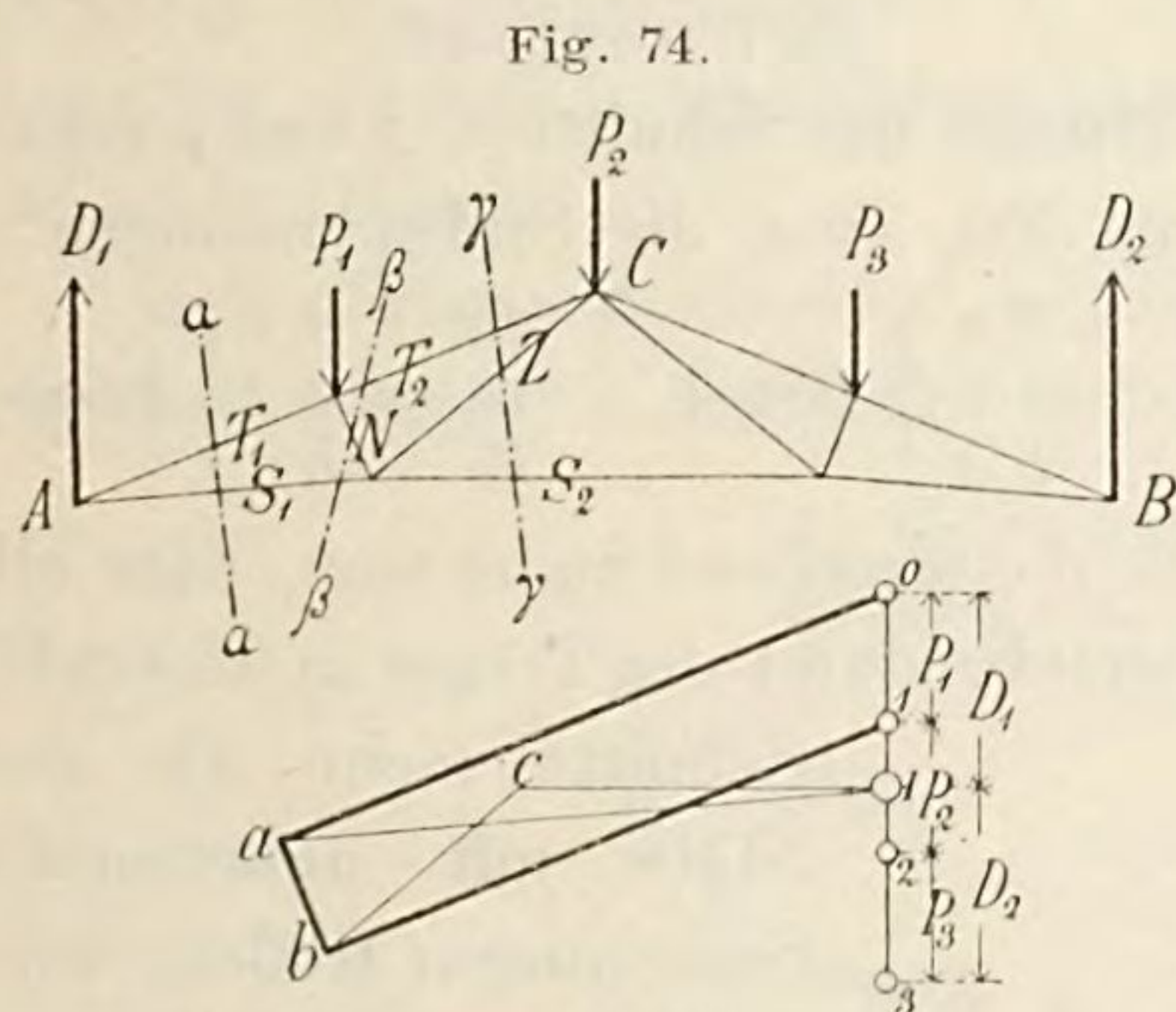
Trägerfragmente ins Gleichgewicht gesetzt denkt, für alle folgenden Schnitte die Resultierende der äusseren Kräfte in der Auflagerreaction D_2 , welche von dem im Auflagerpunkt sich schneidenden Gurtungen aufgenommen wird, daher die Gurtungsspannungen constant und diejenigen der Füllungsglieder gleich Null.

Im Fall der Wind die Dachfläche BC angreift, ergeben sich in ähnlicher Weise die Beanspruchungen sämtlicher Stäbe aus dem Kräfteplan (Fig. 73 b.)

§ 4.

Der Polonceau'sche Dachbinder.**Einfache Form Fig. 74.****A. Beanspruchung durch das Eigengewicht.**

Durch Rechnung werden die Stabkräfte wie S. 75 angegeben, bestimmt. Graphisch ergeben sich dieselben mittels der in Fig. 74 angedeuteten Schnitte aus dem Kräfteplan:



$$\left. \begin{array}{l} T_1 = o a \\ T_2 = 1 b \\ N = b a \end{array} \right\} \text{Druck} \quad \left. \begin{array}{l} S_1 = a I \\ S_2 = c I \\ Z = b c \end{array} \right\} \text{Zug}$$

B. Beanspruchung durch Schneelast.
Auf Grund ähnlicher Beweisführung*) wie S. 78 kann angenommen werden, dass die Beanspruchungen sämtlicher Stäbe bei totaler Belastung des Dachbinders eintritt, wesshalb die Bestimmung der durch Schneelast erzeugten grössten Spannungen wie beim Eigengewicht erfolgt.

C. Beanspruchung durch Winddruck. Wirkt der Wind auf die Dachfläche AC , auf deren Seite sich das bewegliche Auflager befindet, so erhält man die Stabkräfte nach Fig. 75 und 75a wie folgt:

Schnitt α .

Bekannt: Res. d. äuss. Kr. = $I 1$,
unbekannt: T_1, S_1 .

Polygon: $I 1 a I$,

daher: $T_1 = 1 a$ (Dr.)

$S_1 = a I$ (Z.)

Schnitt β .

Bekannt: Res. d. äuss. Kr. = $I 2$,
 $S_1 = a I$,

unbekannt: T_2, N .

Polygon: $a I 2 b a$

daher: $T_2 = 2 b$ (Dr.)

$N = b a$ (Dr.)

Schnitt γ .

Bekannt: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Res. d. äuss. Kr.} = I 2 \\ T_2 = 2 b, \end{array} \right.$

unbekannt: Z, S_2 .

Polygon: $I 2 b c I$,

daher: $Z = b c$ (Z.)

$S_2 = c I$ (Z.)

Schnitt δ .

Bekannt: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Res. d. äuss. Kr.} = I 3 \\ S_2 = c I, \end{array} \right.$

unbekannt: T_2', Z' .

Polygon: $c I 3 d c$,

daher: $T_2' = 3 d$ (Dr.)

$Z' = d c$ (Z.)

*) Nur wenn die untere Gurtung, wie Fig. 74 polygonal angeordnet ist, tritt die Modification ein, dass in beiden Z -Stäben jede auf dem Dachbinder befindliche Last, zur Vermehrung der Zugspannungen dieser Stäbe beiträgt. —

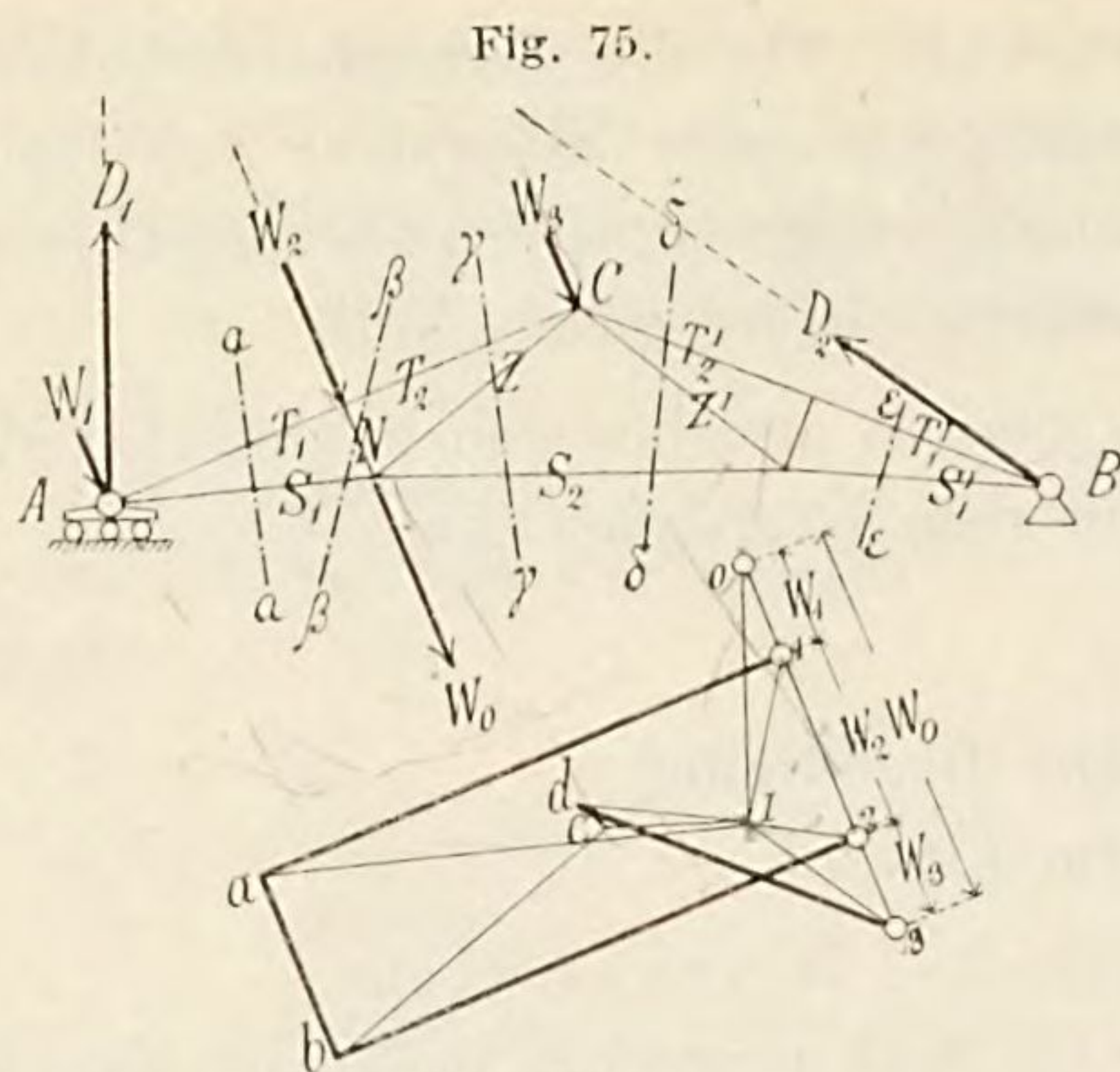


Fig. 75.

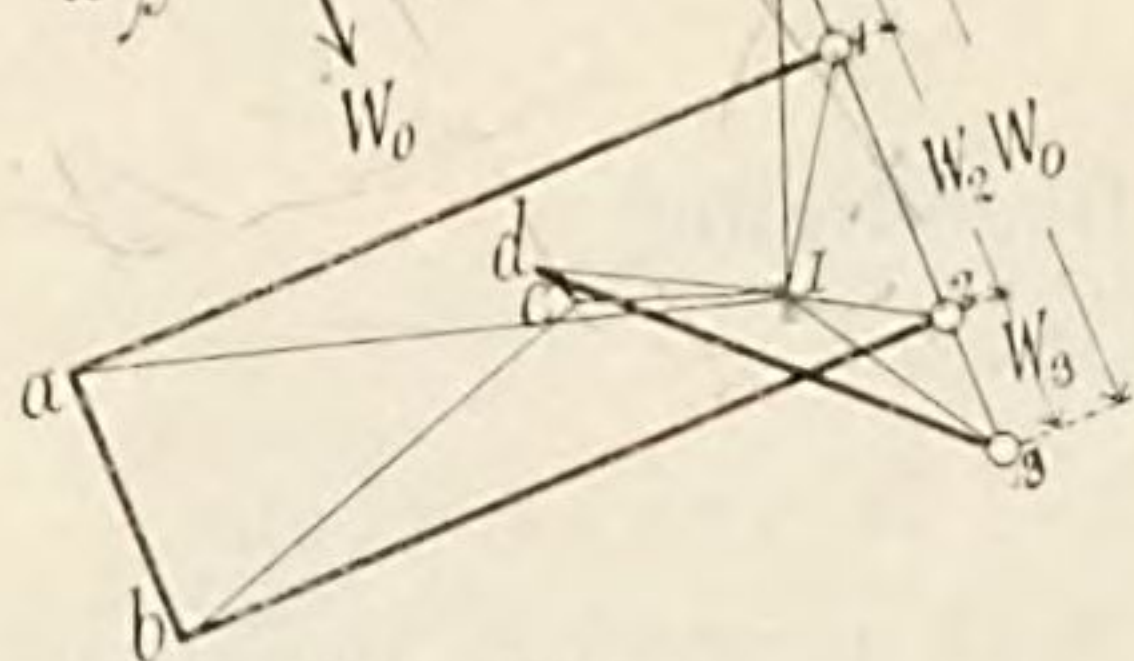


Fig. 75 a.

Fig. 75 b.

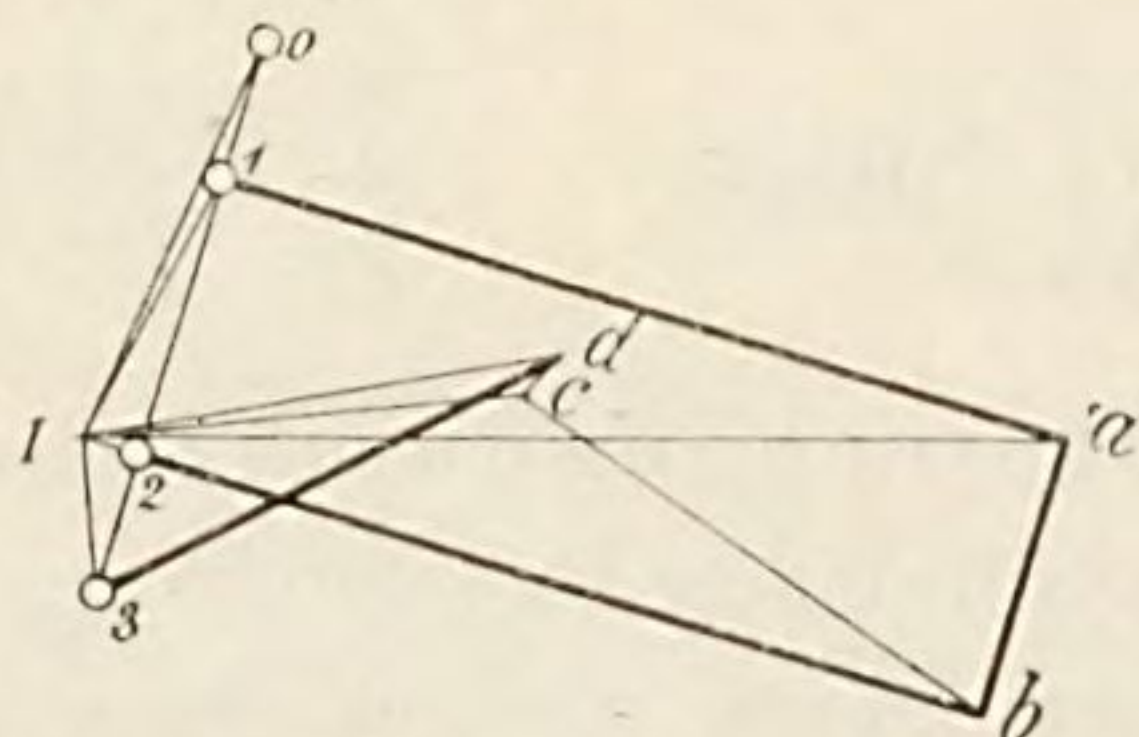


Fig. 76.

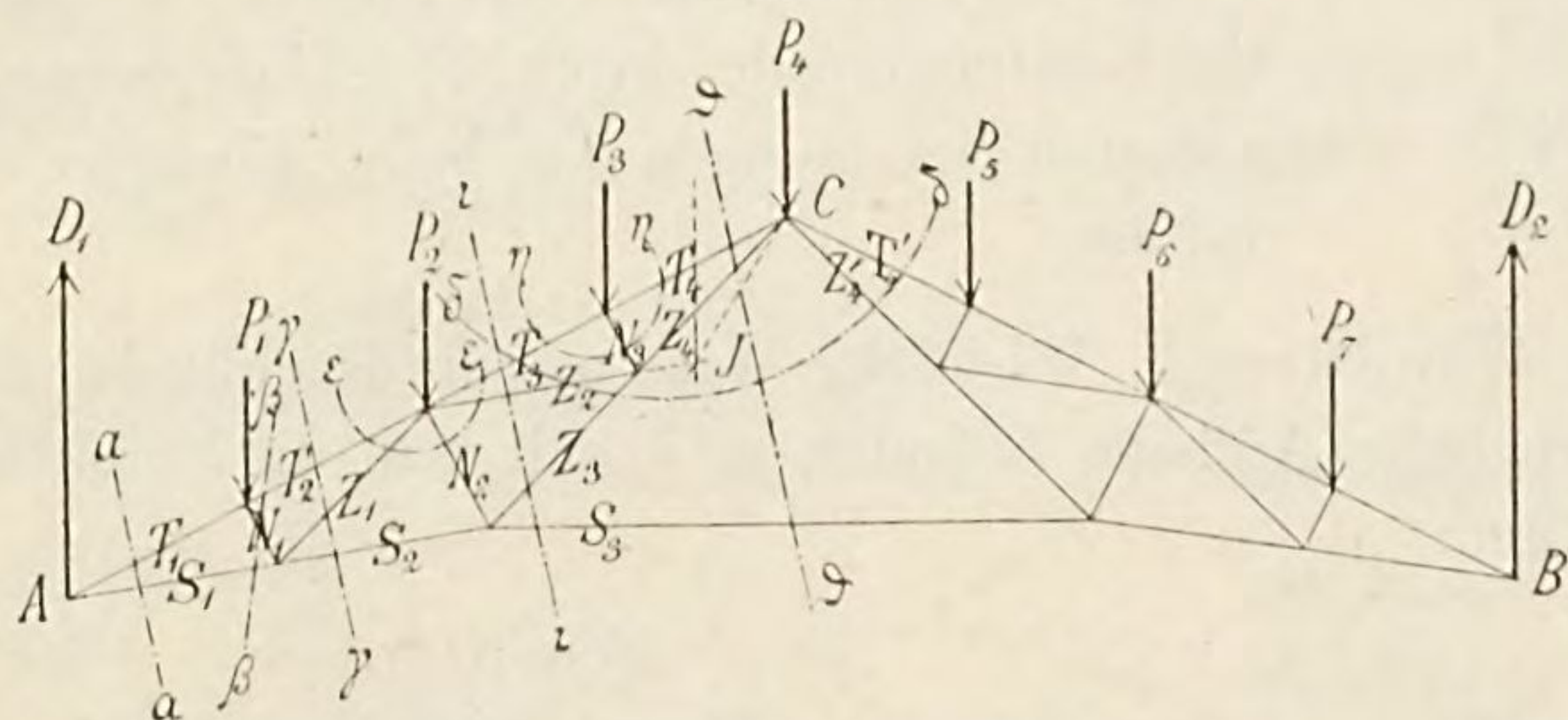
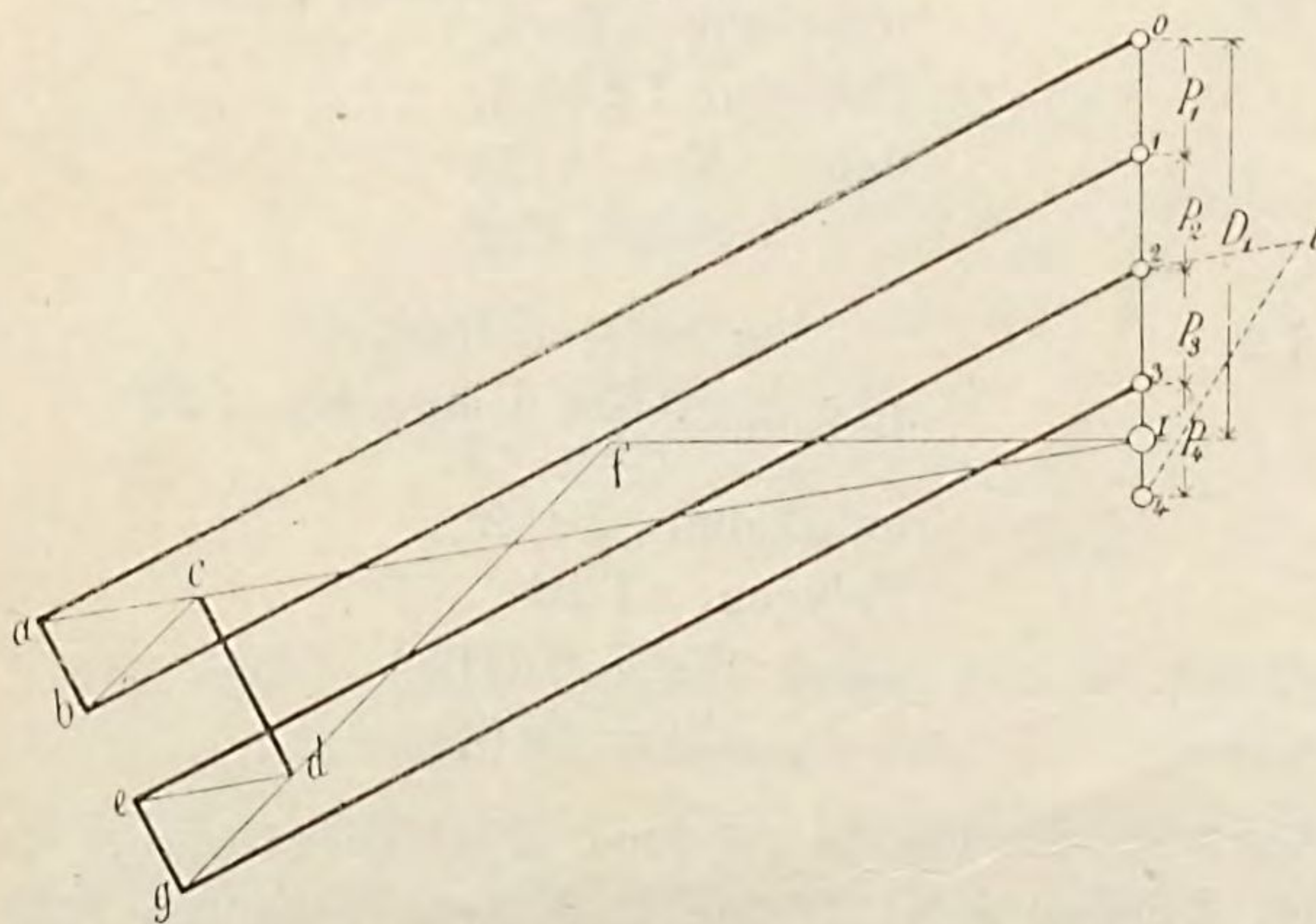


Fig. 76a.



Gerade. Da mit Hülfe eines Seilpolygons die Lage der Resultierenden von P_3 und

Schnitt ϵ .

Bekannt: Res. d. äuss. Kr. = $I 3$,

unbekannt: $T_1' S_1'$.

Polygon: $I 3 d I$,

daher: $T_1' = 3 d (\text{Dr.}) = T_2'$

$S_1' = d I (\text{Z.})$.

B. Die Bestimmung der Spannungen bei Beanspruchung der anderen Dachfläche $B C$ durch den Wind zeigt Fig. 75 b.

Polonceau'sches Dach mit eingeschalteten Systemen. (Fig. 76).

A. Beanspruchung durch Eigengewicht beziehungsweise Schneelast.

Mittels der Schnitte α , β und γ erhält man (Fig. 76 a) die Stabspannungen:

$$\left. \begin{array}{l} T_1 = 0 a \\ T_2 = 1 b \\ N_1 = b a \end{array} \right\} \text{Druck,} \quad \left. \begin{array}{l} S_1 = a I \\ S_2 = c I \\ Z_1 = b c \end{array} \right\} \text{Zug.}$$

Weitergehend findet man, dass alle folgenden durch den Träger zu führenden

Schnitte mehr als zwei Stäbe mit unbekannten Spannungen treffen, weshalb hier zur Vervollständigung des Spannungnetzes erforderlich ist, die Construction einer der folgenden Stabkräfte auf anderem Wege z. B. wie folgt, vorzunehmen:

Man denkt sich den Schnitt δ geführt, welcher die Stäbe mit den Spannungen T_3, Z_2, Z_3, Z_4' und T_4' trifft. Letztere halten den am Trägerfragment befindlichen äusseren Kräfte P_3 und P_4 das Gleichgewicht. Die Resultirende R_1 der genannten fünf Stabkräfte fällt also mit der Resultirenden von P_3 und P_4 in eine und dieselbe

P_4 leicht bestimmt werden kann (bei $P_3 = P_4$ befindet sie sich in der Mitte zwischen beiden Lasten), so ist damit auch die Kraftlinie R_1 bekannt. Es kann nun R_1 als Mittelkraft aus Z_2 und der Resultirenden R' der vier übrigen Stabkräfte T_3, Z_3, Z'_4 und T'_4 angesehen werden und müssen sich demnach R_1, Z_2 und R' in einem Punkte schneiden, d. h. es muss R' durch den Schnittpunkt J von Z_2 und R_1 gehen. Ein anderer Punkt der Kraftlinie R' ist der Punkt C , in welchem sich die vier Kräfte, deren Resultirende sie ist, schneiden, so dass sich genannte Kraftlinie in der Verbindungslinie $J C$ ergibt. Man braucht also nur durch 2 Fig. 76a eine Parallele zu Z_2 und durch 4 eine Parallele zu $J C$ zu ziehen, um $R' = 4 i$ und $Z_2 = i 2$ (Zug) zu erhalten.

Nachdem Z_2 bestimmt, kann, dem Schnitt γ folgend, der Schnitt ε gelegt werden, für welchen T_2, Z_1 und Z_2 bekannt und nur T_3 und N_2 unbekannt sind. Da Z_1, T_2 und P_2 im Kräftezug $c b 1 2$ schon aneinandergereiht sind, so zieht man durch c eine Parallele zu N_2 , ferner durch 2 eine Parallele zu T_3 und schaltet nun zwischen den Richtungslinien N_2 und T_3 das nach Grösse und Richtung bekannte $Z_2 = i 2 = e d$ ein. Das Kräftepolygon $c b 1 2 e d c$ ergibt jetzt $T_2 = 2 e$ (Druck) und $N_2 = d c$ (Druck).

Die übrigen Stabkräfte lassen sich auf gewöhnliche Weise mit Hülfe der Schnitte i, η und ϑ ermitteln: Man erhält:

$$\left. \begin{array}{l} T_4 = 3 g \\ N_3 = g e \end{array} \right\} \text{Druck,} \quad \left. \begin{array}{l} S_3 = f l \\ Z_3 = d f \\ Z_4 = g f \end{array} \right\} \text{Zug.}$$

Fig. 77.

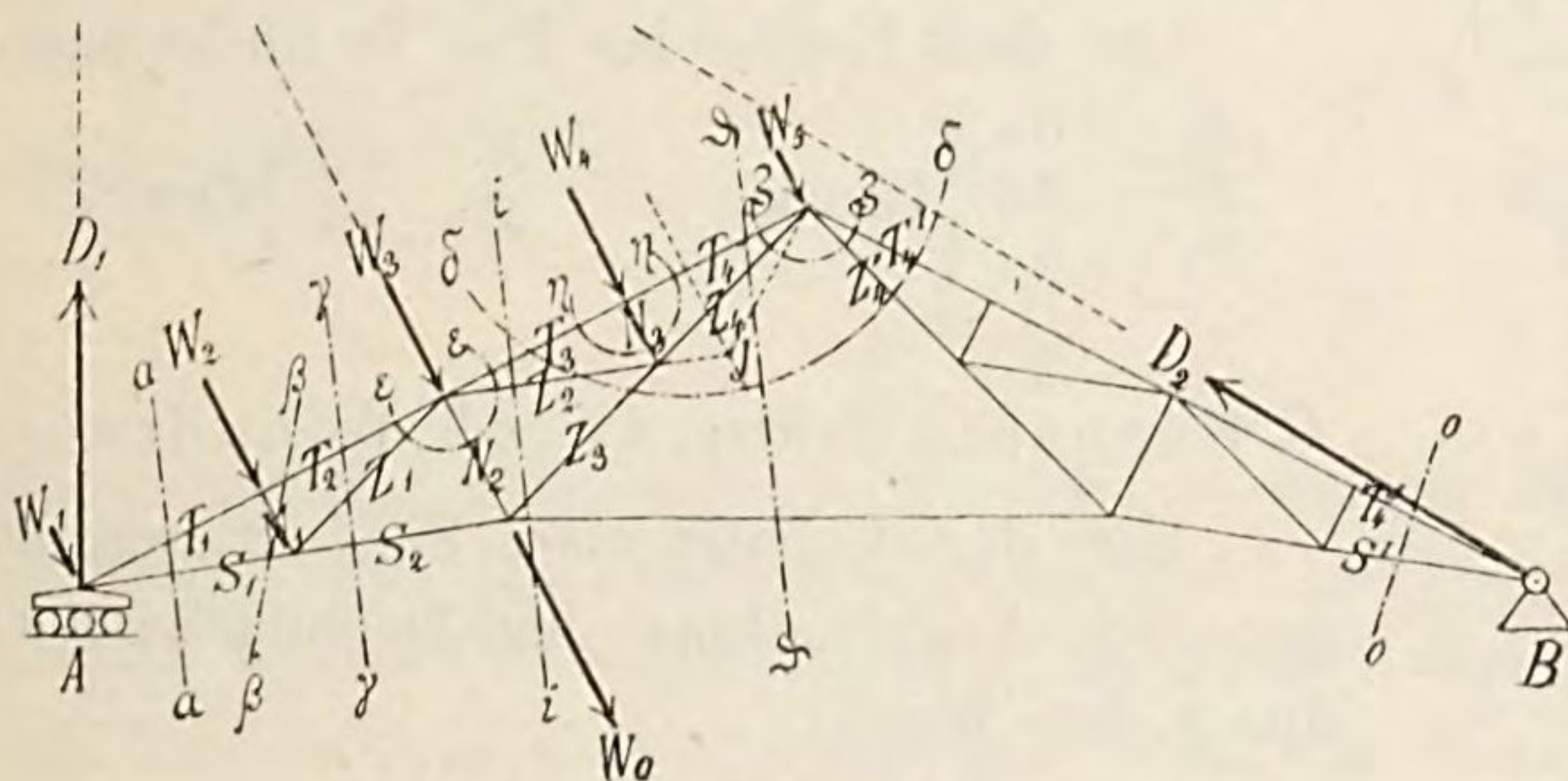
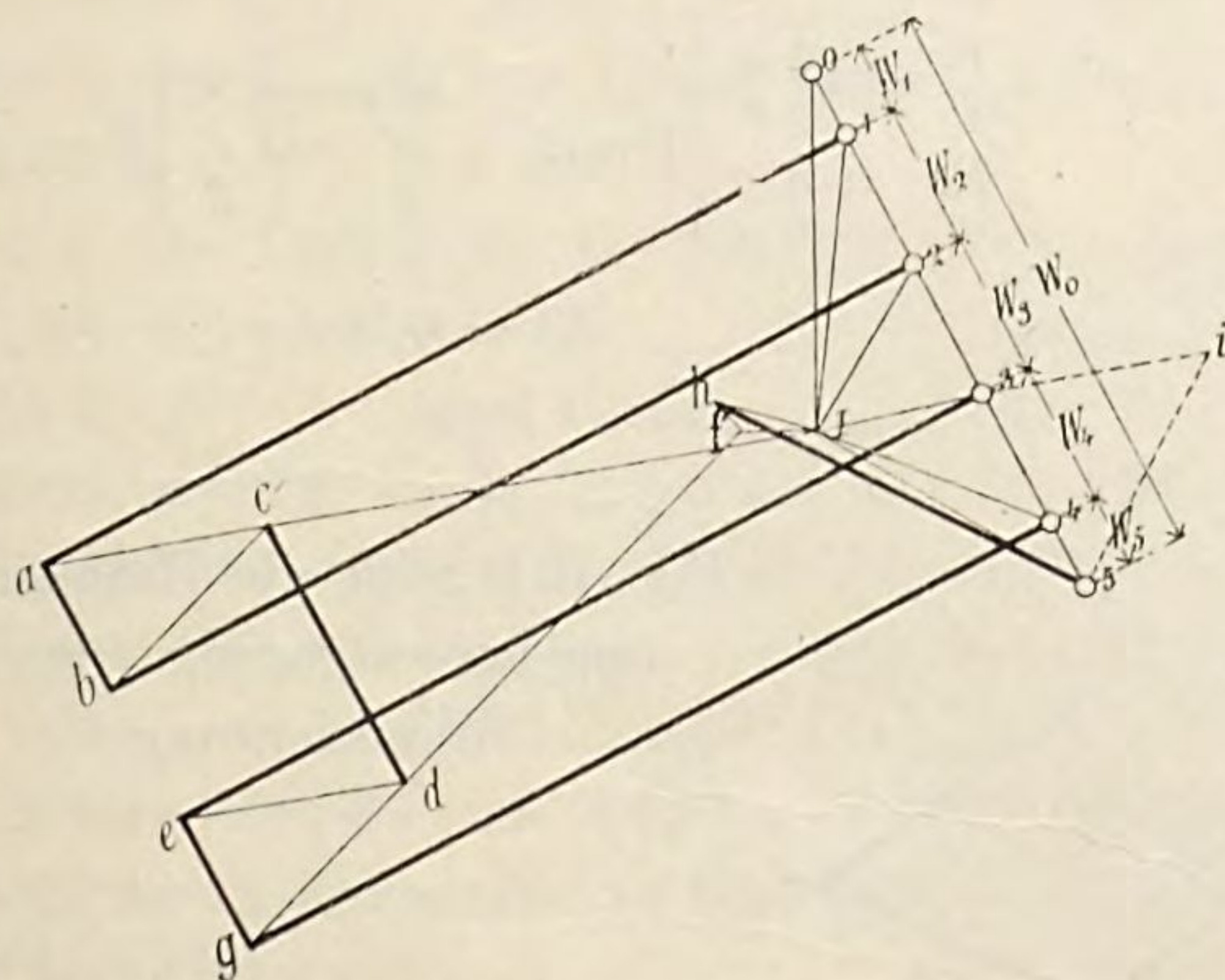


Fig. 77 a.



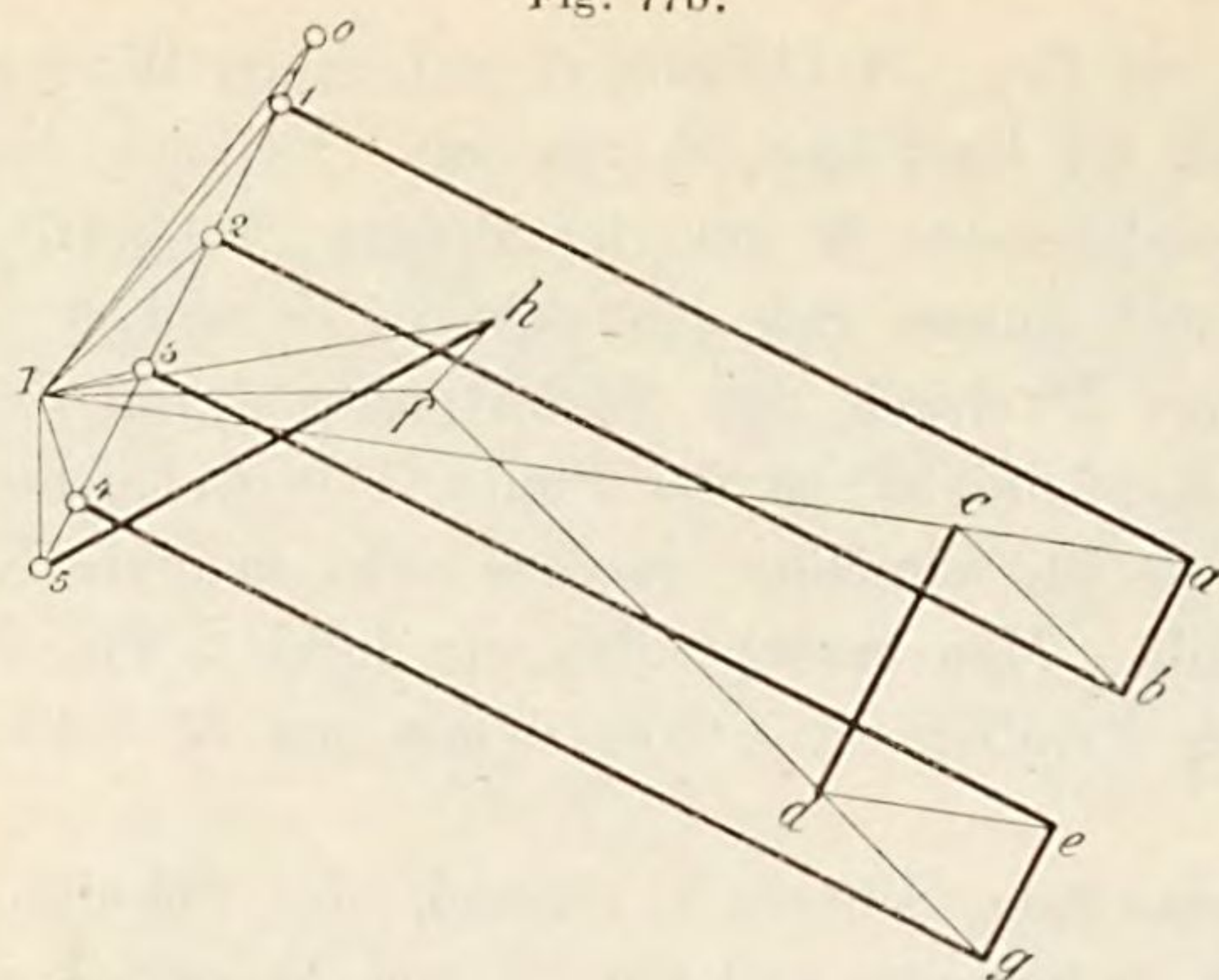
B. Beanspruchung durch den Winddruck.

Fig. 77 und 77 a zeigen die Bestimmung der Stabspannungen wenn die Dachfläche auf Seite des beweglichen Auflagers durch den Wind beansprucht wird.

Ähnlich wie oben wird mittels des Schnittes δ $Z_2 = 3 i$ gefunden. Man erhält sonach:

$$\left. \begin{array}{l} T_1 = 1 a \\ T_2 = 2 b \\ T_3 = 3 c \\ T_4 = 4 g \\ T_4' = 5 h \\ N_1 = b a \\ N_2 = d c \\ N_3 = g e \end{array} \right\} \text{Druck}$$

Fig. 77b.



$$\begin{array}{l}
 S_1 = a I \\
 S_2 = c I \\
 S_3 = f I \\
 S_1' = h I \\
 Z_1 = b c \\
 Z_2 = 3 i = e d \\
 Z_3 = d f \\
 Z_4 = g f \\
 Z_4' = h f
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} S_1 = a I \\ S_2 = c I \\ S_3 = f I \\ S_1' = h I \\ Z_1 = b c \\ Z_2 = 3 i = e d \\ Z_3 = d f \\ Z_4 = g f \\ Z_4' = h f \end{array}} \right\} \text{Zug (Fig. 77a)}$$

Die Bestimmung der Stabkräfte, wenn der Wind die andere Dachfläche angreift, ist Fig. 77b dargestellt.

§ 5.

Der deutsche Dachbinder.

Der deutsche Dachbinder Fig. 78 unterliegt in statischer Beziehung der gleichen Betrachtungsweise wie das englische Dach, von dem er einen speciellen Fall bildet.

Fig. 78.

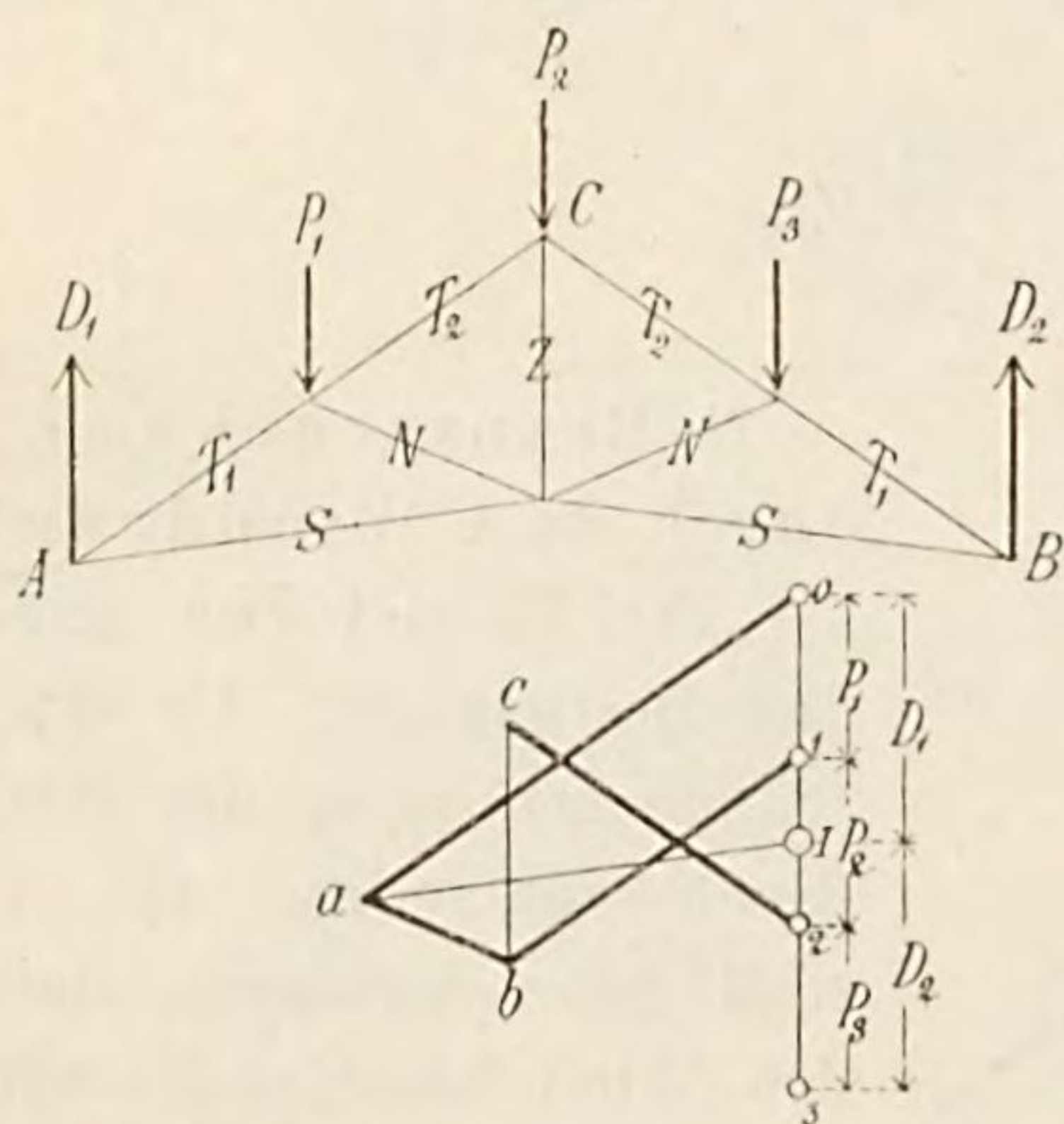


Fig. 79.

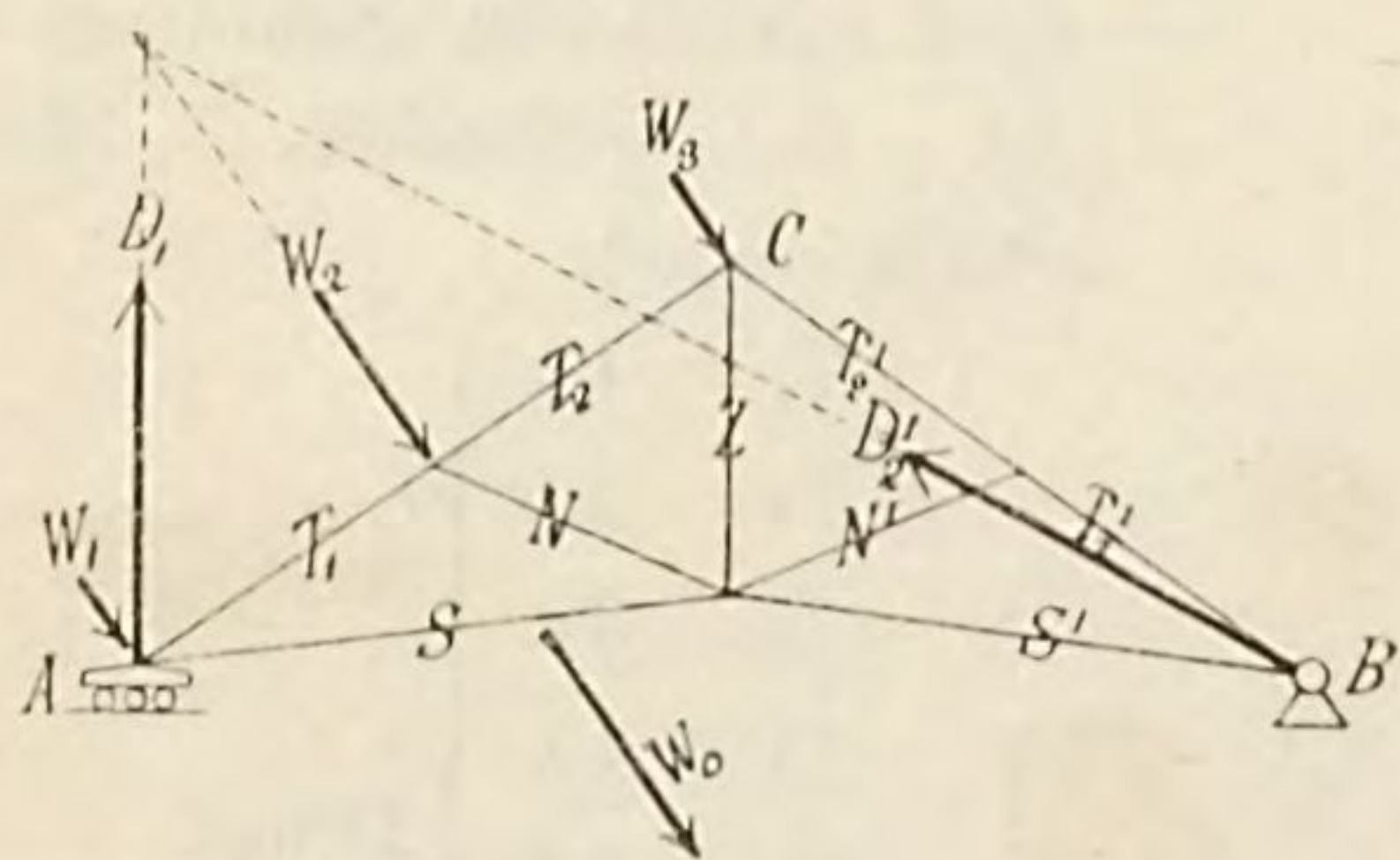


Fig. 79a.

Fig. 79b.

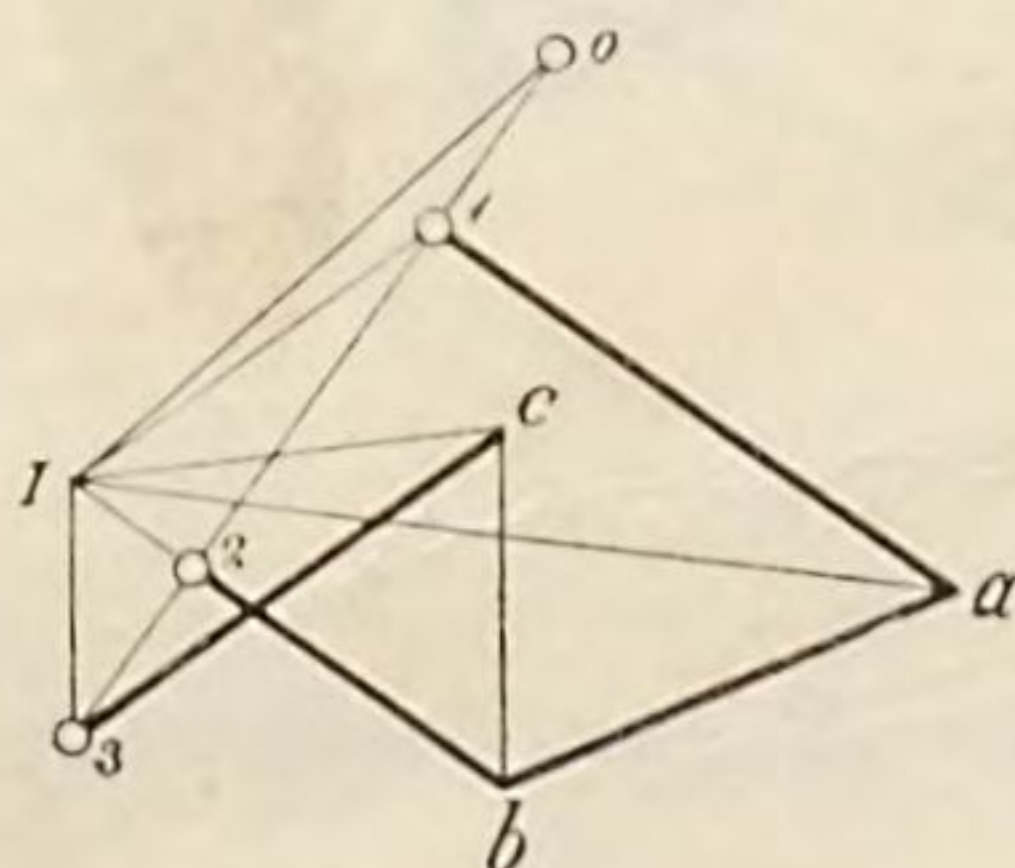
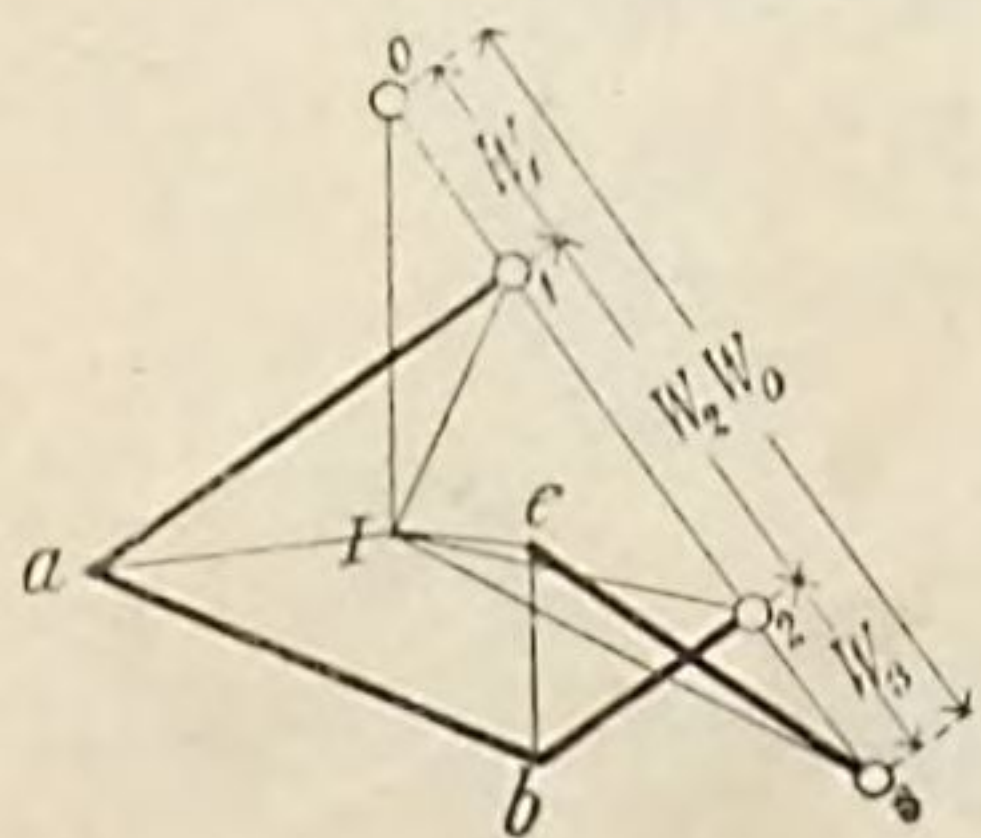


Fig. 79 b zeigt die Beanspruchung bei entgegengesetzter Windrichtung.

A. Beanspruchung durch Eigengewicht, bzw. totale Schneelast.

Aus dem Kräfteplan Fig. 78 findet man:

$$\begin{array}{l}
 T_1 = 0 a \\
 T_2 = 1 b \\
 N = b a
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} T_1 = 0 a \\ T_2 = 1 b \\ N = b a \end{array}} \right\} \text{Druck,} \quad \begin{array}{l} S = a I \\ Z = c b \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} S = a I \\ Z = c b \end{array}} \right\} \text{Zug.}$$

B. Beanspruchung durch Winddruck.

Aus der Construction Fig. 79 a ergibt sich bei Angriffnahme der Dachfläche A C durch den Wind:

$$\begin{array}{l}
 T_1 = 1 a \\
 T_2 = 2 b \\
 T_2' = 3 c \\
 N = b a
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} T_1 = 1 a \\ T_2 = 2 b \\ T_2' = 3 c \\ N = b a \end{array}} \right\} \text{Druck,} \quad \begin{array}{l} S = a I \\ S' = I c \\ Z = c b \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} S = a I \\ S' = I c \\ Z = c b \end{array}} \right\} \text{Zug,}$$

$$N' = 0.$$

Es gilt dieser Satz für Parabelträger sowohl mit gekrümmter oberer bei gerader unterer Gurtung als auch für die umgekehrte Anordnung, endlich auch für Parabelträger mit

Fig. 81.

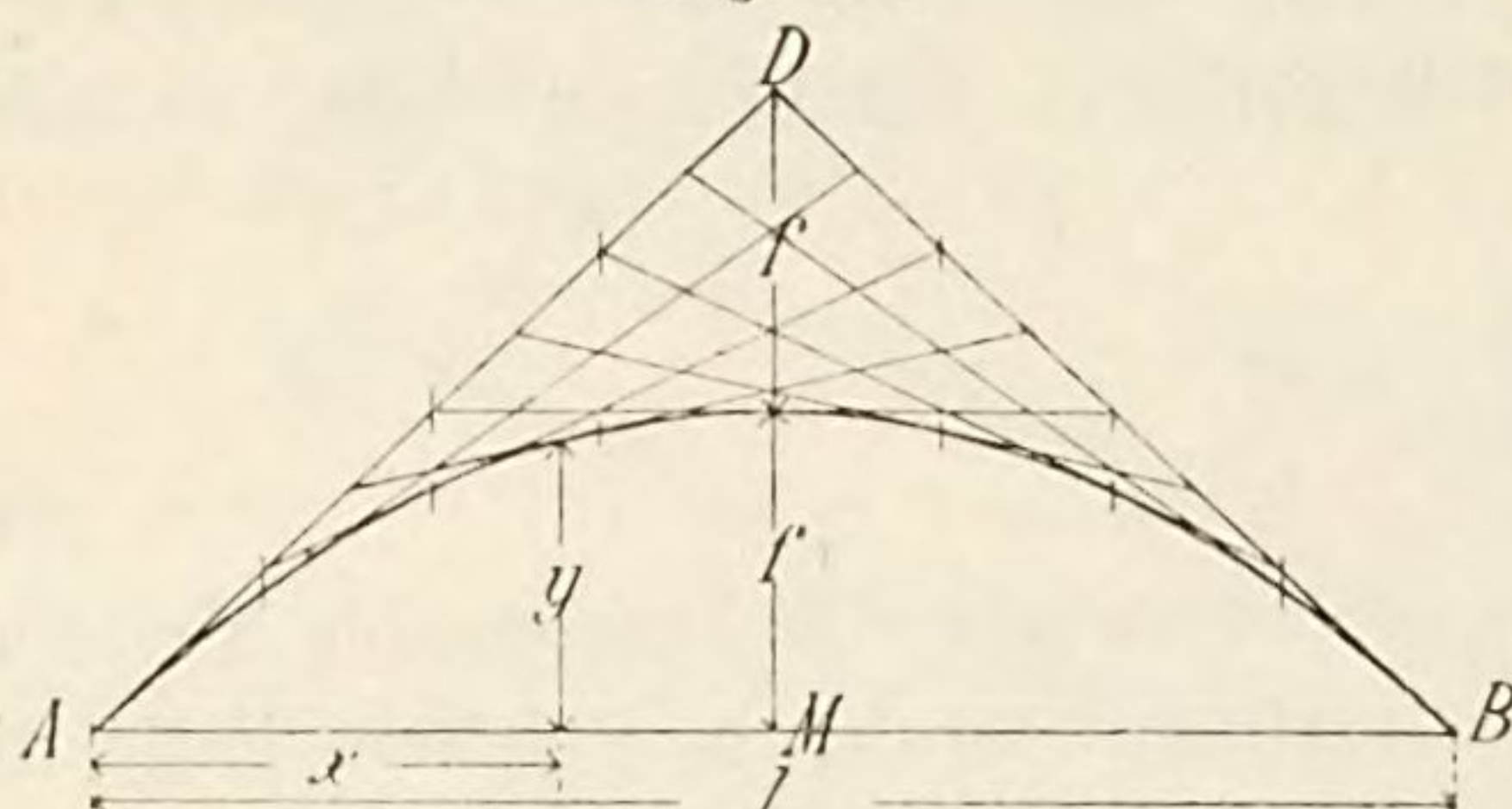


Fig. 82.

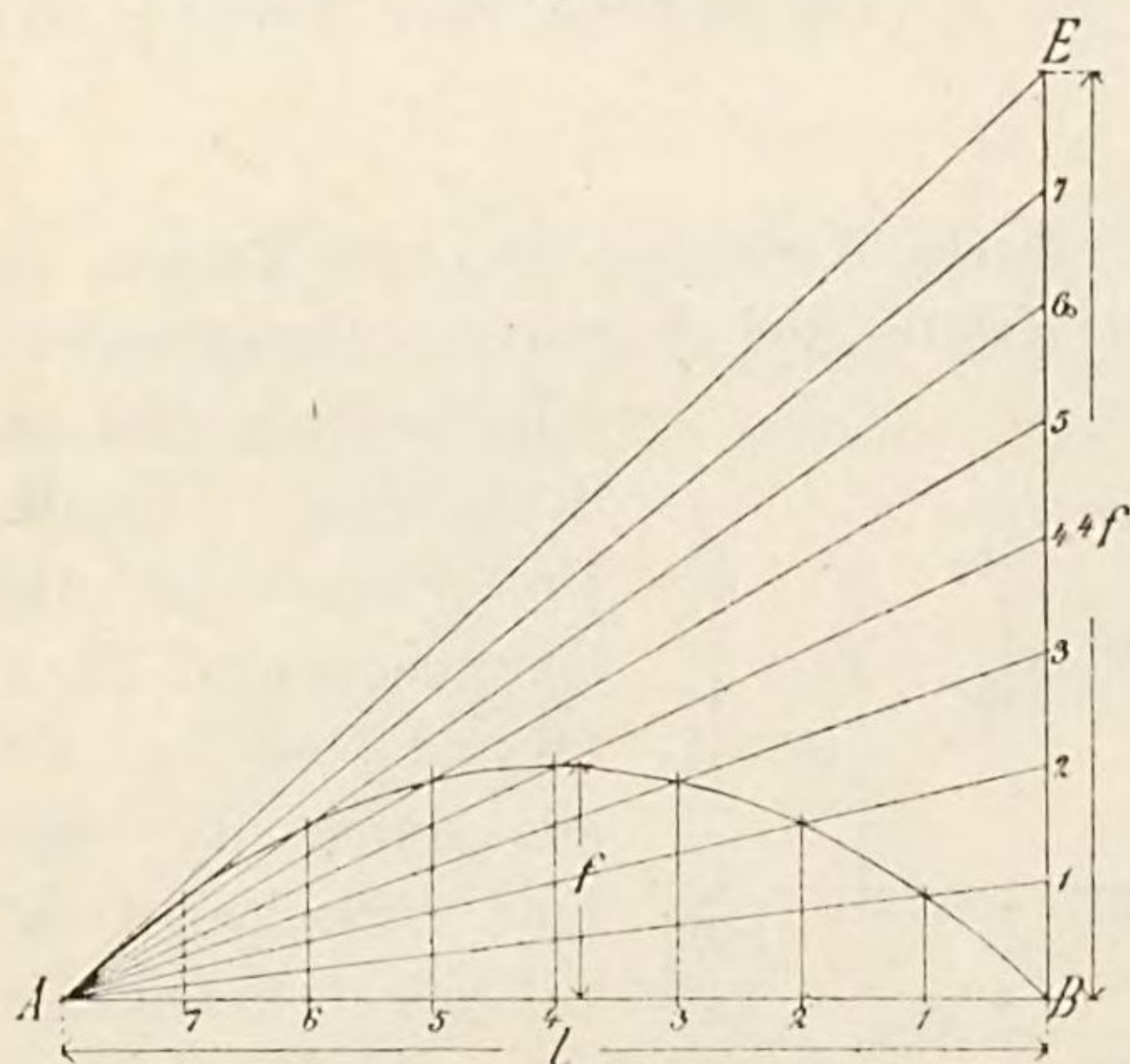


Fig. 83.

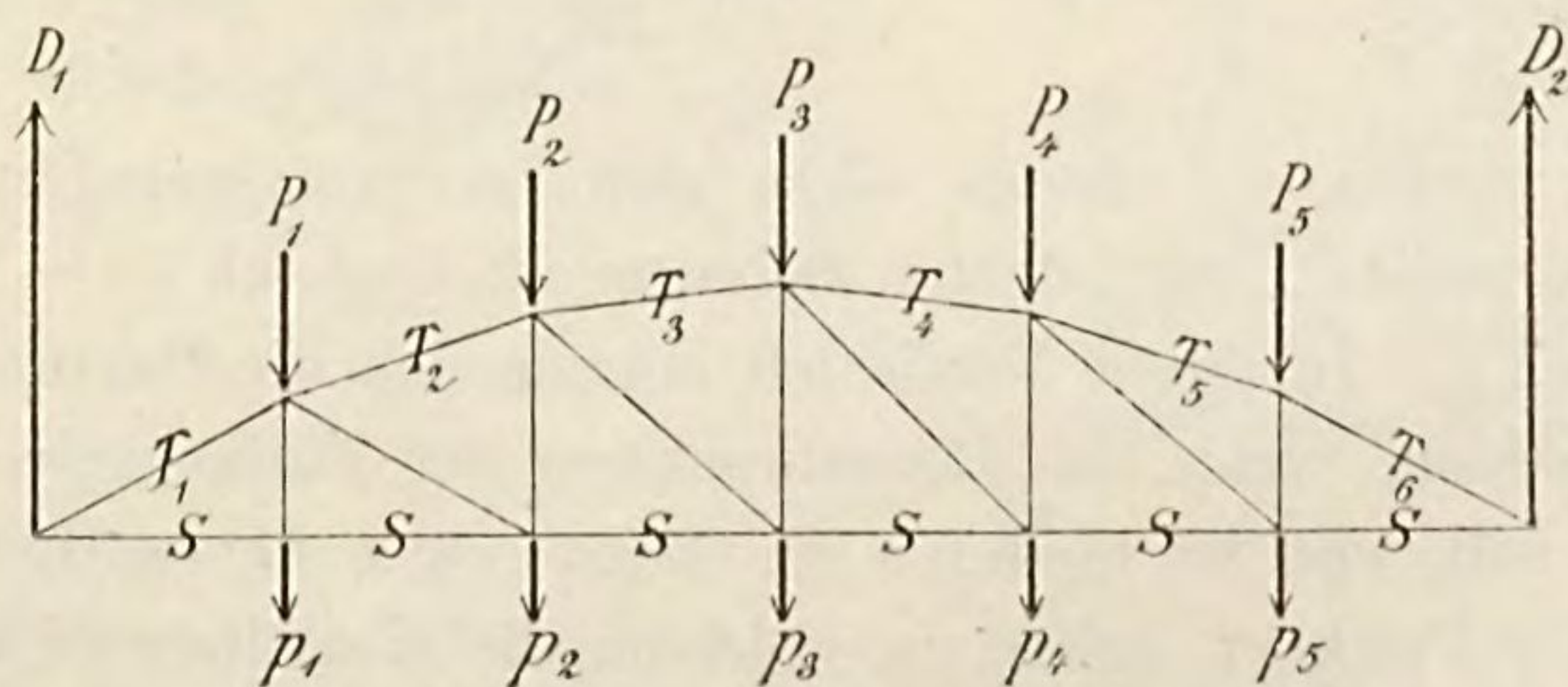
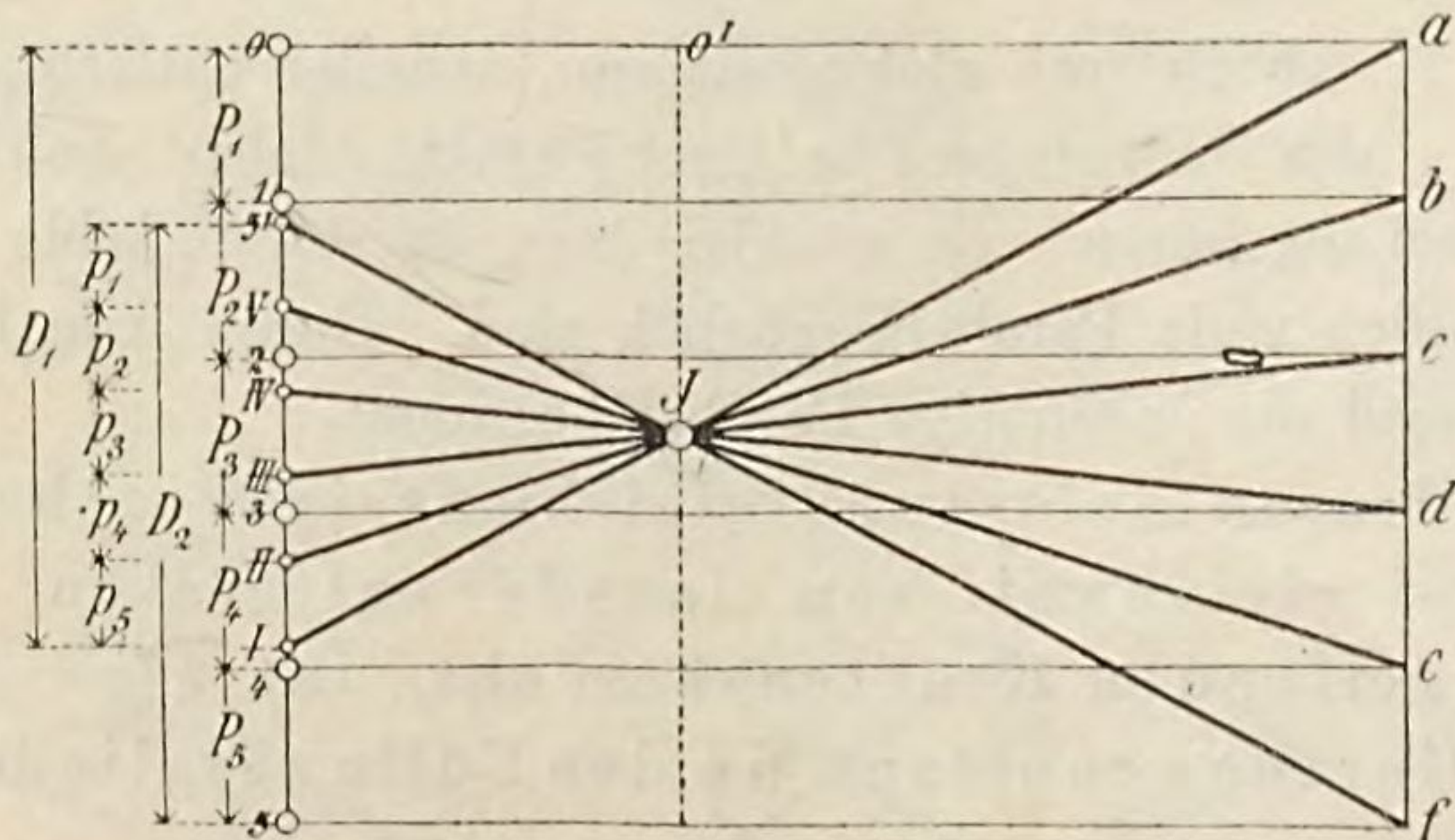


Fig. 83a.



kraft der unteren Gurtung $S = 0$ erhalten wird. Die Beanspruchung der Diagonalen

beiderseits gekrümmten Gurtungen. Im Folgenden sollen nur die erstgenannten Träger einer näheren Betrachtung unterzogen werden; die für die anderen erforderlichen Modificationen sind leicht zu finden.

Ist l die Spannweite und f die Trägerhöhe im Scheitel (Fig. 81), so erhält man die Parabelordinaten aus der Gleichung:

$$y = \frac{4f}{l^2} (lx - x^2).$$

Durch Construction wird die Parabel bestimmt entweder, indem man Fig. 81 $MD = 2f$ aufträgt, mittels der Endtangenten DA und DB nach Th. II S. 16 oder durch Auftragen der Strecke $BE = 4f$ (Fig. 82) und durch Theilen genannter Strecke, sowie der Trägerlänge in n Theile. Die Strahlen $A_1, A_2 \dots$ schneiden auf den verticalen Theilungslinien der Spannweite die entsprechenden Parabelpunkte ab.

A. Beanspruchung durch Eigengewicht.

Wir denken das Eigengewicht auf die oberen und unteren Knotenpunkte des Trägers vertheilt und bezeichnen (Fig. 83) mit $P_1 = P_2 = \dots = P_5$ die oberen und mit $p_1 = p_2 = \dots = p_5$ die unteren Knotendrucke. Man trägt Fig. 83a $01 = P_1, 12 = P_2 \dots 45 = P_5, 55' = D_2, 5'V = p_5, VIV = p_4 \dots IIV = p_1$ auf, so sind die Strahlen $Ia, IIb \dots 5'f$ gleich den Druckkräften $T_1, T_2 \dots T_6$ der ihnen parallelen Gurtungsstäbe, während die für alle Felder constante Zugkraft der unteren Gurtung $S = 0$ erhalten wird. Die Beanspruchung der Diagonalen

ist gleich Null, die der Verticalstäbe besteht in den als Zugwirkungen auftretenden unteren Knotendrücken. Sind diese unteren Knotendrücke nicht vorhanden (totale Schneebelastung) so ist auch die Beanspruchung der Verticalstäbe gleich Null und man erhält $S = 0^1 a$, ferner $T_1 = J a$, $T_2 = J b \dots T_6 = J f$. Wären nur die in der unteren Gurtung wirkenden Knotendrücke vorhanden, so würde das Kräftepolygon $J s' I$ sämtliche Stabkräfte liefern.

B. Beanspruchung durch Schneelast.

a) Gurtungen.

Die ungünstigste Angriffnahme der Gurtungen tritt nach S. 69 bei totaler Belastung des Dachbinders durch Schnee ein.

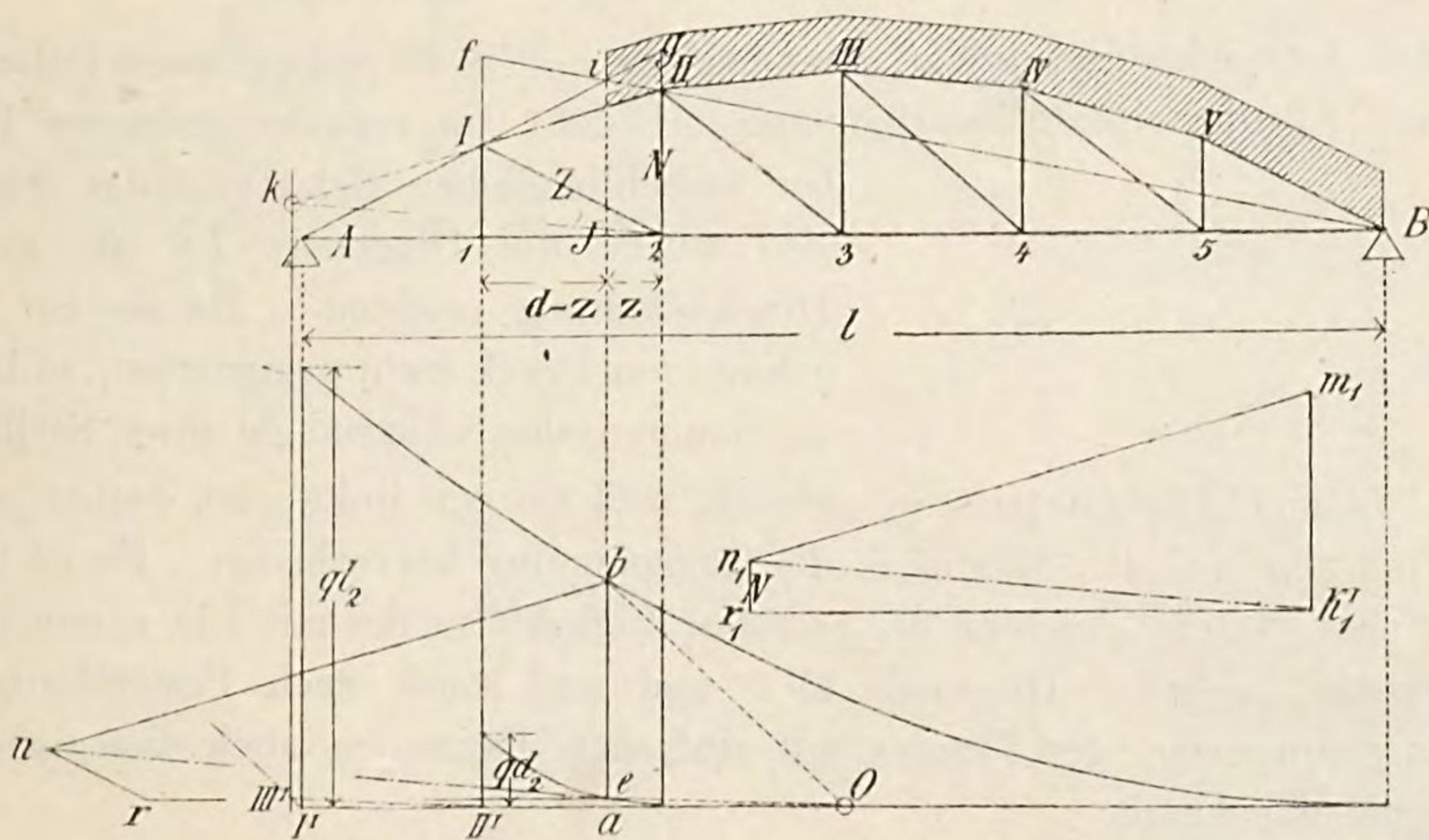
b) Füllungsglieder.

Die Maximalspannungen in den Füllungsgliedern finden bei einseitiger Belastung des Trägers statt. Für die Bestimmung derselben sind S. 70 die nöthigen Anhaltspunkte gegeben, welchen für den vorliegenden Fall des parabolischen Trägers und gleichmässig vertheilte Last noch einiges Nähere beigelegt werden soll.

Diagonalen.

Die Belastungsscheide für irgend eine Diagonale $I 2$ wird durch den Schnitt der von den Auflagern A und B nach den oberen Knotenpunkten des die Diagonale

Fig. 84.



enthaltenden Feldes bestimmt Fig. 84. Da bei der Parabel $I f : II g = B J : A J$ so ist auch

$$z : d - z = A J : B J, \quad \dots \dots \dots (114)$$

d. h. die Last muss bis zu derjenigen Stelle in das Feld einrücken, durch welche die Trägerlänge im umgekehrten Verhältniss wie die Fachlänge getheilt wird.

Jede rechts von J befindliche Last erzeugt in der von links nach rechts fallenden Diagonale Zug, jede links befindliche Last Druck. Sind die Diagonalen von links nach rechts steigend angeordnet, so findet das Umgekehrte statt, die Lasten links bewirken Zug, die rechts aufgebracht Druck.

Das Maximum also z. B. der Zugbeanspruchung in I 2 wird bei der in Fig. 84 angedeuteten Belastungsweise auftreten.

Zur graphischen Ermittlung dieser Maximalbeanspruchung nach dem S. 69 angegebenen Verfahren ist die Kenntniss des hiebei in A auftretenden Auflagerdruckes D_1 , sowie des auf I übertragenen Knotendruckes K_1 erforderlich. Man zeichnet also nach Th. II S. 84 die Linie der Auflagerdrücke und diejenige der Knotendrucke des betr. Feldes und erhält dadurch für die in Rede stehende Belastung $D_1 = a b$ und $K_1 = e a$. Das für den beliebigen Pol O construirte Seilpolygon I' II' III' liefert einen Punkt III' der Kraftlinie der Resultirenden $V = e b$ aus D_1 und K_1 , wodurch, wenn en parallel $2k$ gezogen wird, das Kräfteviereck $e b n r e$ und $+ Z_{\max} = n r$ sich ergibt.

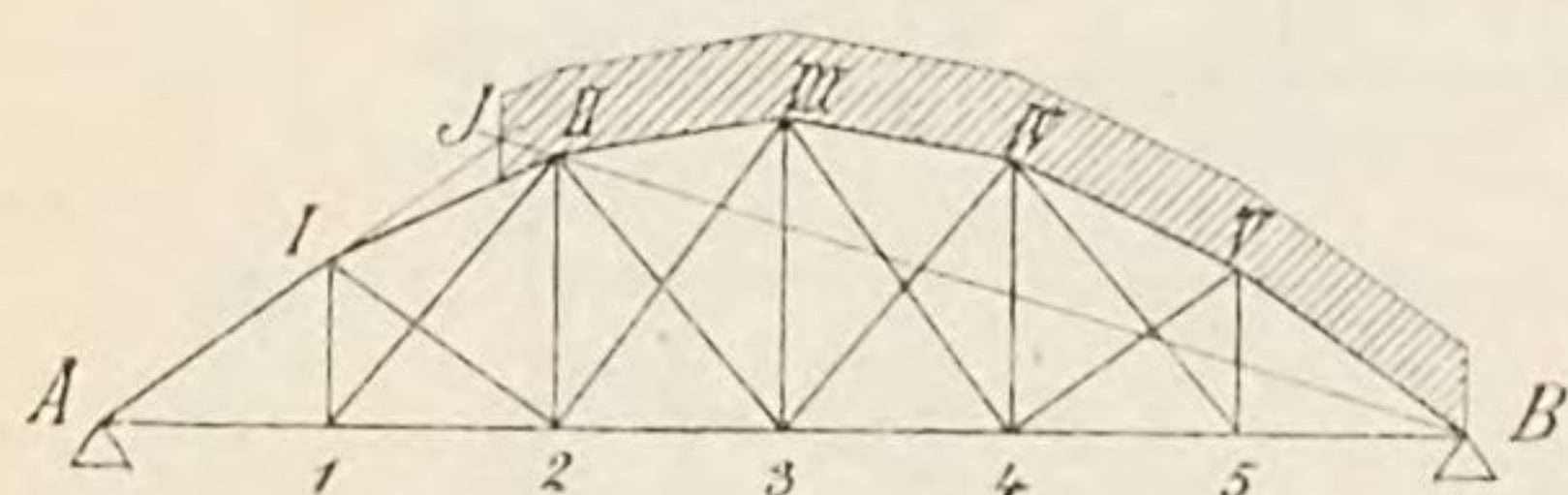
Analog wird $- Z_{\max}$ entsprechend der Belastung der Trägerstrecke $A i$ erhalten.

Ueber die Ermittlung der Maximalstabkräfte mittels Influenzlinien S. S. 71.

Gekreuzte Diagonalen. Beim Träger mit je einer Diagonale in jedem Felde wechselt nach Vorstehendem die Diagonalkraft zwischen einer grössten Zug- und einer grössten Druckbeanspruchung und ist dem entsprechend die Form und Grösse des Querschnitts zu bemessen. Wird aber der Träger mit schlaffen Diagonalen ausgeführt, d. h. mit solchen, welche zur Aufnahme von Druckkräften nicht geeignet sind, so müssen in jedem Felde zwei sich kreuzende Diagonalen angebracht werden und es tritt dann jede von beiden nur bei derjenigen Belastung in Thätigkeit welche Zug in ihr erzeugt, während die andere spannungslos bleibt.

Es wurde beispielsweise gezeigt, dass bei der in Fig. 85 angegebenen Belastung die Diagonale I 2 die grösste Zugspannung erleidet. Im entgegengesetzten Falle,

Fig. 85.



bei ausschliesslicher Belastung der Strecke $A J$ würde die Diagonale I 2 die grösste Druckspannung erleiden. Da sie zur Aufnahme von Druck nicht geeignet ist, so bleibt sie spannungslos, während an ihrer Stelle die

Diagonale 1 II in Thätigkeit tritt, in welcher, weil sie von links nach rechts steigt, die Belastung von $A J$ das Maximum der Zugspannung hervorbringt. Es ist leicht einzusehen, dass letztere gleich ist der grössten Zugkraft in der mit 1 II symmetrisch zur Trägermitte liegenden Diagonale IV 5 und sind somit nach Feststellung der Maximal-Zugspannungen des Trägers mit einfachen Diagonalen auch diejenigen der Gegendiagonalen bekannt.

Analytische Behandlung. Man nehme an, dass die Last, von einem der beiden Auflager kommend, auf die Strecke z in das Fach eingerückt sei und bestimme für diese Laststellung die Momente der angrenzenden Knotenpunkte, so ergibt sich nach Gl. 101₁ ein Ausdruck für die der vorhandenen Belastung entsprechende Diagonalkraft. Ermittelt man nun durch Differenziren denjenigen Werth von z , welcher jenen Ausdruck zum Maximum macht, so kommt man auf das schon oben erwähnte Gesetz:

$$z : d - z = A J : B J$$

Wird der so erhaltene Werth von z in den Ausdruck für die Diagonalkraft eingeführt, so ergibt sich das weitere Gesetz, dass die Horizontalcomponenten der maximalen Diagonalkräfte sämtlicher Felder gleich gross sind. *)

Verticalstäbe.

Für einen Verticalstab *II 2* Fig. 84 erhält man, wenn man einen schiefen Schnitt durch denselben gelegt denkt, nach S. 70 die Belastungsscheide i , bei horizontaler unterer Gurtung zusammenfallend mit der Belastungsgrenze der Diagonale *I 2*. Jede Last rechts von i erzeugt Druck in dem Stab, jede links befindliche Last Zug. Die grösste Druckbeanspruchung $N_{\max}$ für *II 2* findet also bei der in Fig. 84 bezeichneten Laststellung statt, welcher $V = e b$, wirkend in der Verticalen durch *III'*, entspricht. Nach S. 69 liefert das Kräfteviereck $k'1 m1 n1 r1$ $N_{\max} = n1 r1$.

C. Beanspruchung durch den Winddruck.

Der Wind wirke gegen die auf der Seite des beweglichen Auflagers gelegene Dachfläche, deren einzelnen Abtheilungen *A I*, *I II*, *II III* die Windpressungen W'_0

Fig. 86.

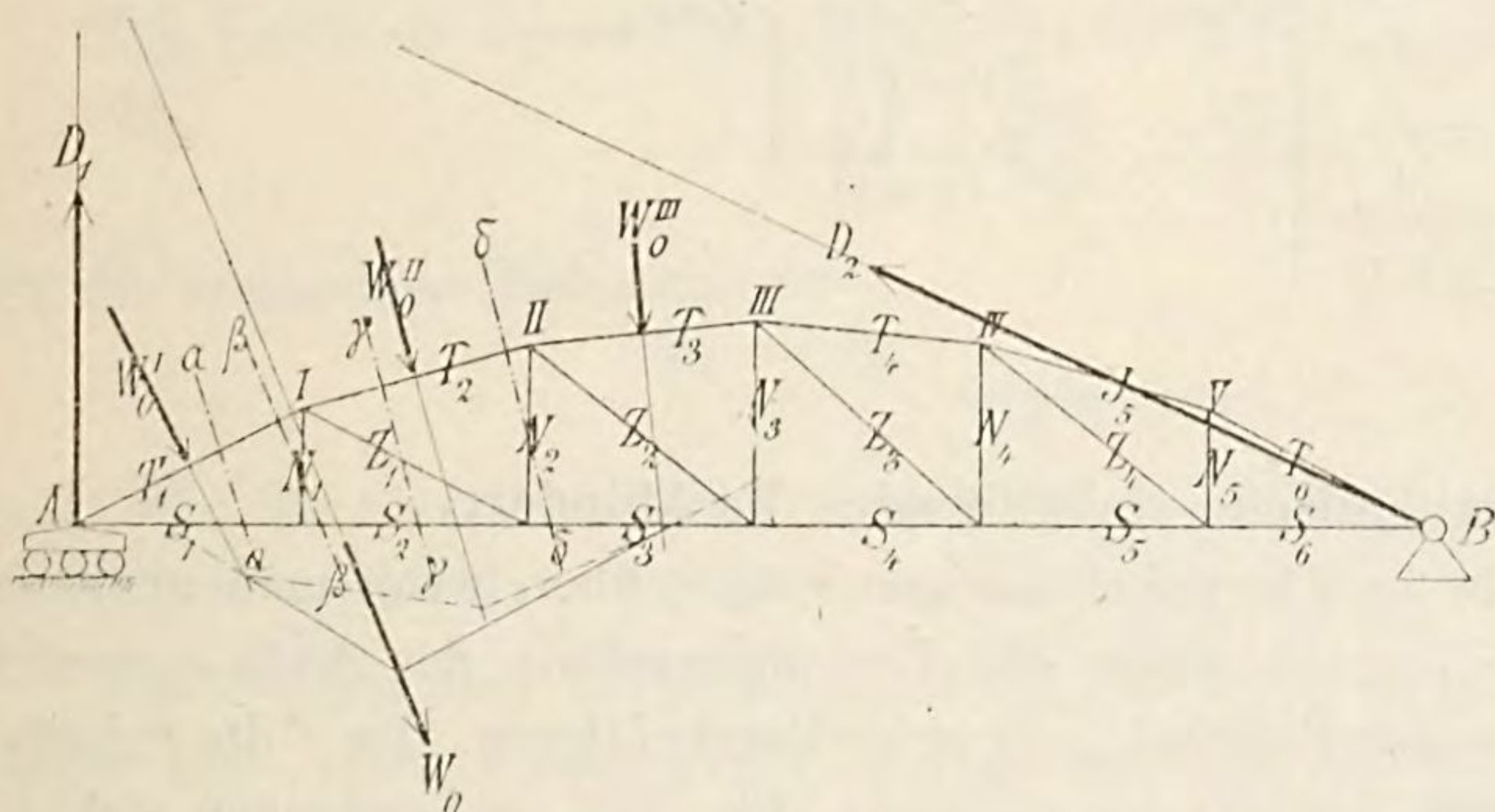
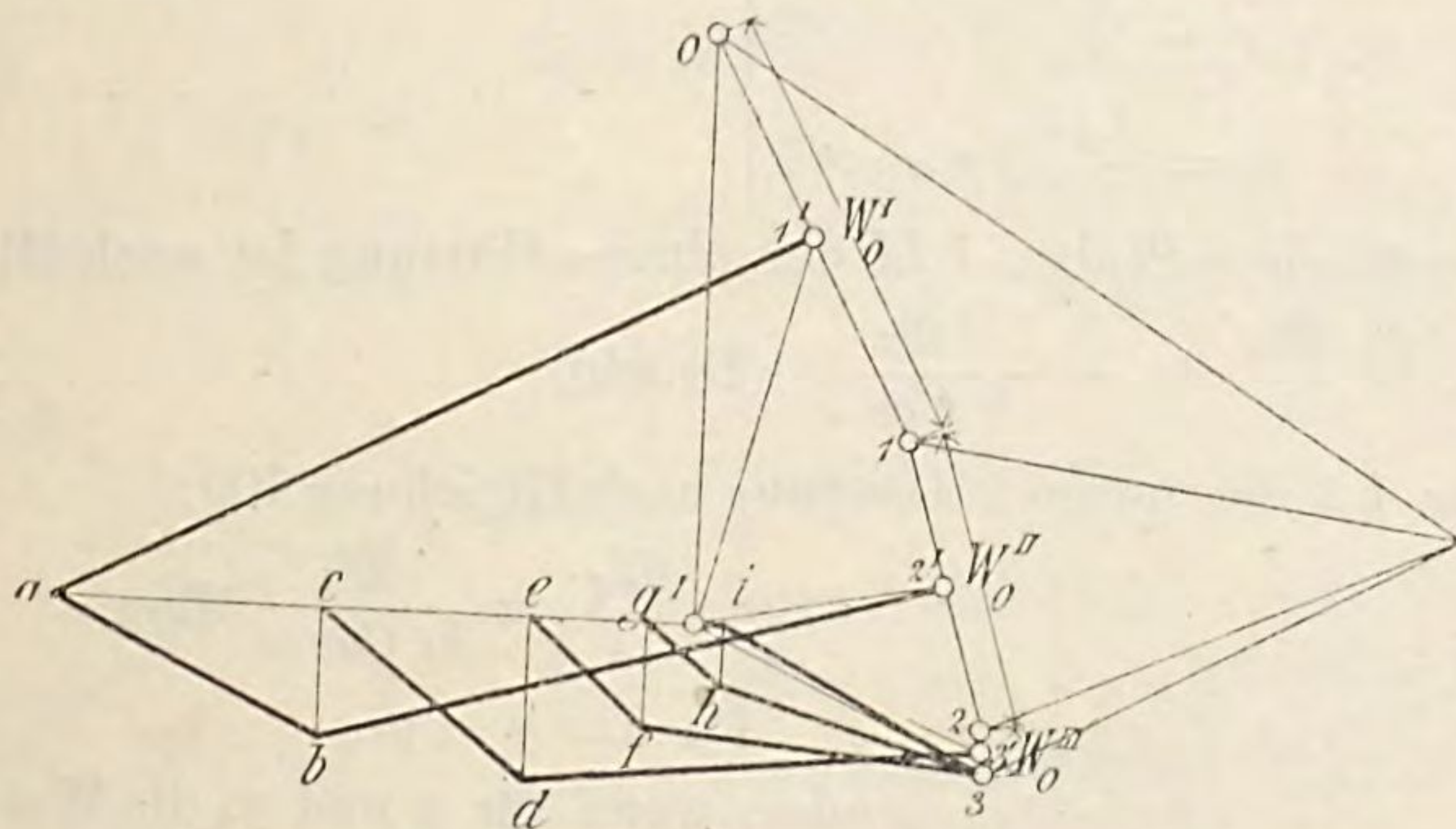


Fig. 86a.



$= 01$, $W''_0 = 12$, $W'''_0 = 23$ Fig. 86 entsprechen. Die Resultirende W_0 und deren Auflagerreactionen $D_1 = 10$ und $D_2 = 31$ werden nach S. 74 gefunden; $01'$ und $1'1$ seien ferner die durch W'_0 auf A und I übertragenen Knotendrucke, dergleichen $12'$ und $2'2$ die Knotendrucke von W''_0 in I und II , endlich $23'$ und $3'3$ die Knotendrucke von W'''_0 in II und III . Die bei dieser Belastung entstehenden Stabkräfte ergeben sich wie folgt:

*) L o e w e, Ueber eine Eigenschaft der Parabelträger, Zeitsch. d. bayer. Arch.-u. Ing.-Vereins 1876.

Schnitt α .Bekannt: Res. d. äuss. Kr. $R = I 1'$ unbekannt: T_1, S_1 .Polygon: $I 1' a I$,daher: $T_1 = 1' a$ (Druck) $S_1 = a I$ (Zug).Schnitt β .Bekannt: $\begin{cases} R = I 1' \\ T_1 = 1' a, \end{cases}$ unbekannt: S_2, N_1 .Polygon: $I 1' a I$,daher: $S_2 = a I$, (Zug) $N_1 = 0$.Schnitt γ .Bekannt: $\begin{cases} R = I 2' \\ S_2 = a I, \end{cases}$ unbekannt: T_2, Z_1 .Polygon: $I 2' b a I$,daher: $T_2 = 2' b$ (Druck) $Z_1 = b a$ (Druck).Schnitt δ .Bekannt: $\begin{cases} R = 1 2' \\ T_2 = 2' b \end{cases}$ unbekannt: N_2, S_3 .Polygon: $I 2' b c I$,daher: $N_2 = b c$ (Zug) $S_3 = c I$ (Zug).

und so fortfahrend:

$$\left. \begin{array}{l} T_3 = 3' d \\ T_4 = 3 f \\ T_5 = 3 h \\ T_6 = 3 i \\ Z_2 = d c \\ Z_3 = f e \\ Z_4 = h g \\ S_6 = i I \end{array} \right\} \text{Druck} \quad \left. \begin{array}{l} S_4 = e I \\ S_5 = g I \\ N_3 = d e \\ N_4 = f g \\ N_5 = h i \end{array} \right\} \text{Zug.}$$

§ 7.

Der parabolische sichelförmige Dachbinder.

Der Parabelträger geht in den sichelförmigen Träger über, wenn man auch der unteren Gurtung die Form eines gegen die Verbindungslinie der Auflagerpunkte concaven Polygons gibt, dessen Eckpunkte in einer Parabel liegen. Ist f die Scheitelhöhe der oberen und f_1 die der unteren Gurtung (Fig. 87), so bestimmen sich die Parabelordinaten beider Gurtungen aus den Gleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{4f}{l^2} (lx - x^2) \\ y_1 = \frac{4f_1}{l^2} (lx - x^2) \end{array} \right\} \dots \dots \dots (115)$$

und

Die Beanspruchung irgend eines Stabes III der oberen Gurtung ist nach Gl. 99

$$T = - \frac{\mathfrak{M}_2}{t} = - \frac{\mathfrak{M}_2}{h \cos \varepsilon} \text{ (Druck),}$$

diejenige irgend eines Stabes 12 der unteren Gurtung nach Gleichung 100:

$$S = \frac{\mathfrak{M}_I}{s} = \frac{\mathfrak{M}_I}{h_1 \cos \varepsilon_1} \text{ (Zug).}$$

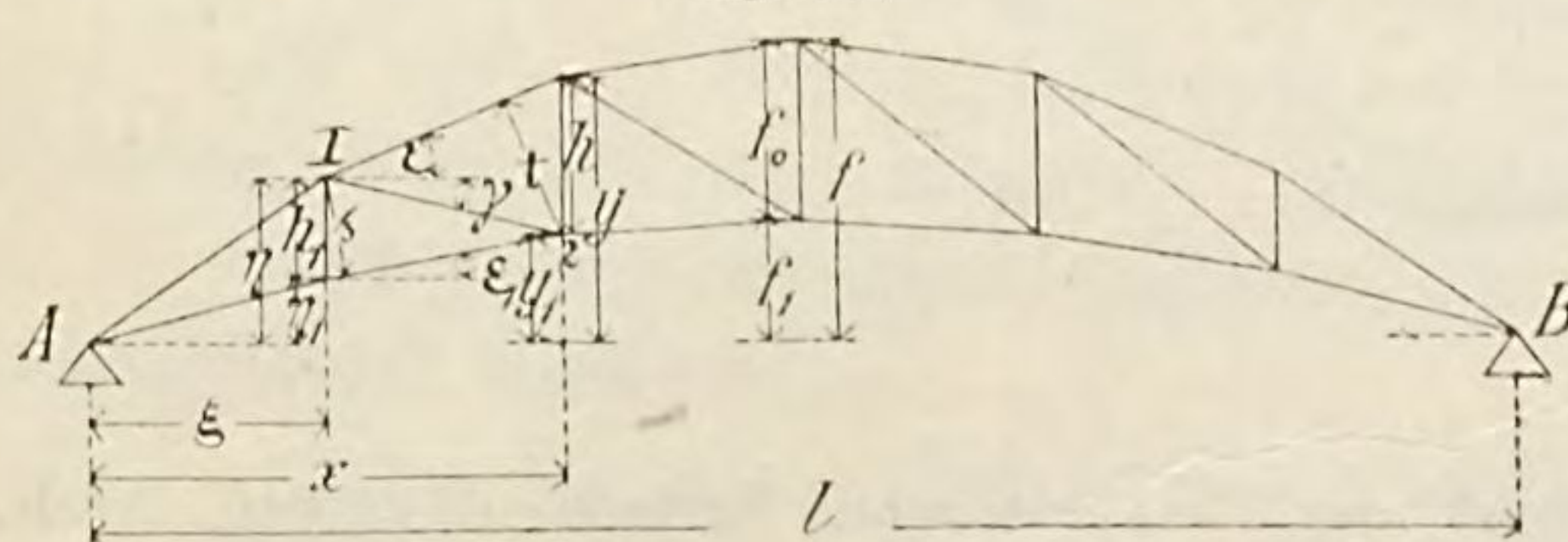
Da $h = y - y_1$ oder, wenn für y und y_1 die Werthe aus 115 eingeführt werden,

$$h = \frac{4}{l^2} (f - f_1) (lx - x^2) = \frac{4}{l^2} + f_0 (lx - x^2),$$

so ist

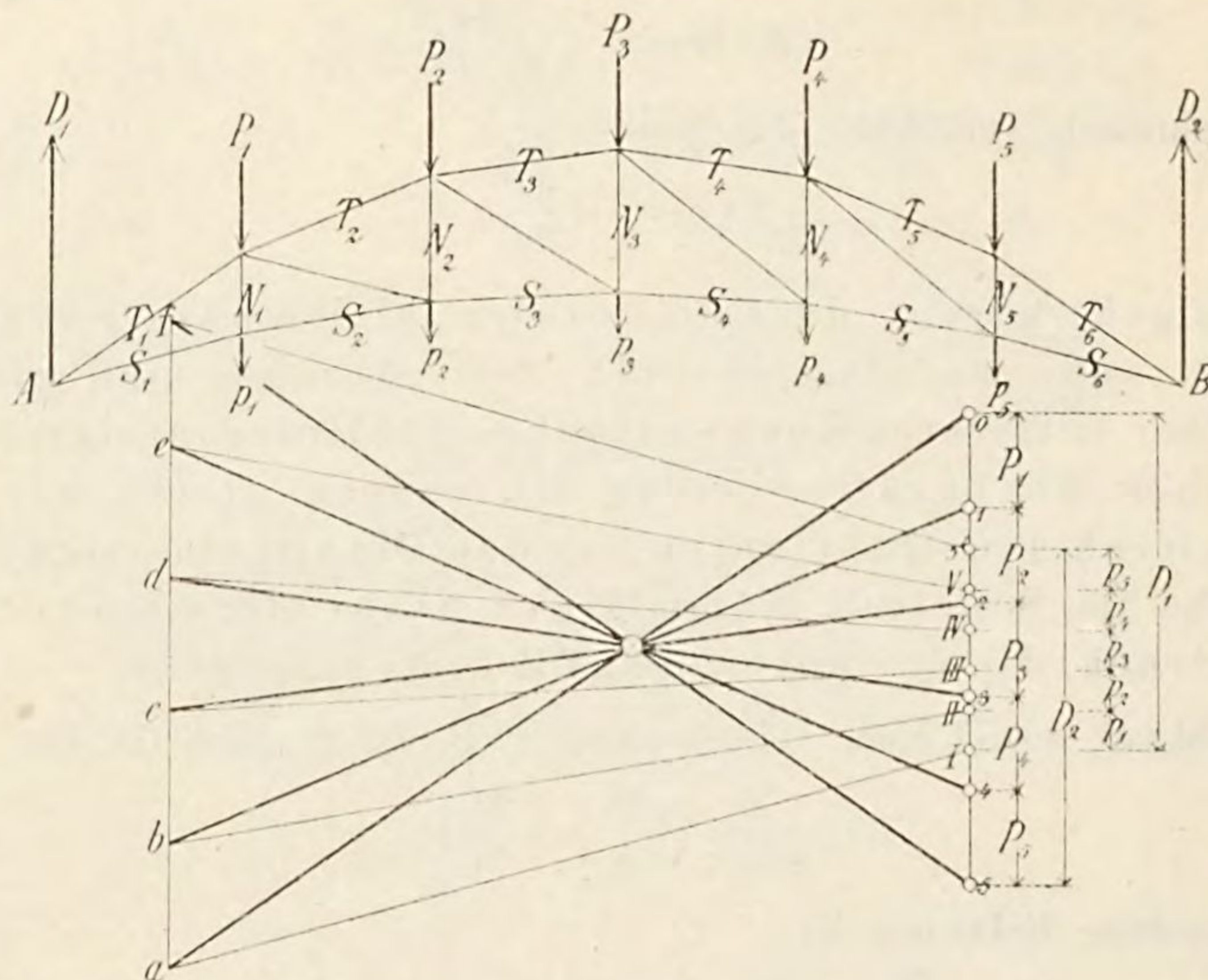
$$T \cos \varepsilon = - \frac{\mathfrak{M}_2 l^2}{4 f_0 (lx - x^2)}$$

Fig. 87.



$$\begin{array}{lcl}
 \left. \begin{array}{l} T_1 = 0 \ a \\ T_2 = 1 \ b \\ T_3 = 2 \ c \\ T_4 = 3 \ d \\ T_5 = 4 \ e \\ T_6 = 5 \ f \end{array} \right\} \text{Druck} & \left. \begin{array}{l} S_1 = a \ I \\ S_2 = b \ II \\ S_3 = c \ III \\ S_4 = d \ IV \\ S_5 = e \ V \\ S_6 = f \ 5' \end{array} \right\} \text{Zug} & \left. \begin{array}{l} N_1 = ab \\ N_2 = bc \\ N_3 = cd \\ N_4 = de \\ N_5 = ef \end{array} \right\} \text{Zug}
 \end{array}$$

Fig. 89.



B. Beanspruchungen durch Schneelast.

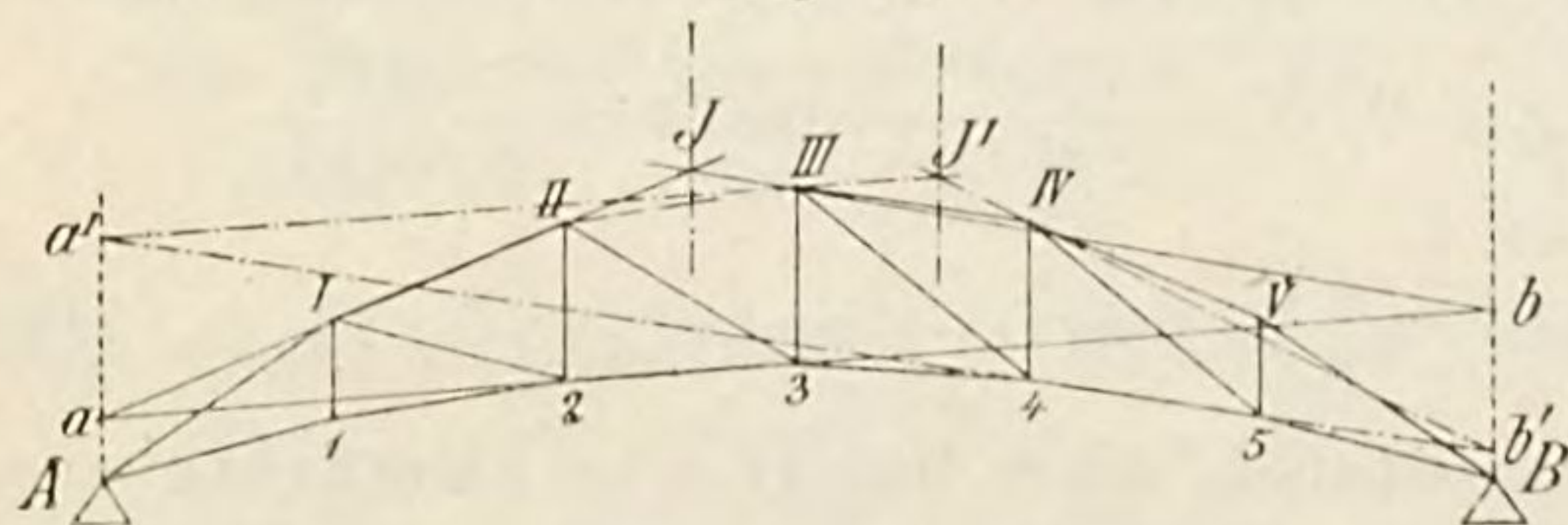
a) Gurtungen.

Die grössten Stabkräfte in den beiden Gurtungen entstehen bei totaler Schneebelastung. Sie werden gerade so wie beim Eigengewicht (Fig. 89) gefunden, indem nur die Knotendrucke der unteren Gurtung in Wegfall kommen.

b) Füllungsglieder.

Diagonalen. Die Belastungsscheide für jeden Stab kann nach S. 70 sofort angegeben werden. Für die Diagonale II 3 z. B. (Fig. 90) wird sie erhalten durch

Fig. 90.



Verlängerung von 23 bis zum Schnitt a und b mit den Auflagerverticalen und durch Ziehen der Verbindungslinien $a \ II$ und $b \ III$. Sind damit die Belastungen bekannt, welche die Maximal-Zug- oder Druckbeanspruchung im Stab

erzeugen, so können Letztere durch Rechnung oder graphisch leicht ermittelt werden. Das hiebei angewendete, des Näheren beim parabolischen Träger angegebene graphische Verfahren Fig. 84 vereinfacht sich besonders, wenn die Annahme gemacht wird, dass die Last statt bis zur Belastungsscheide J , nur bis an die Grenze des Feldes, welchem der Stab angehört, sich erstrecke, welche Annahme wohl in vielen Fällen der Anwendung statthaft sein wird. Für die ins Auge gefasste Diagonale II 3

würde demnach $+Z_{\max}$ entstehen bei Belastung des Trägertheils vom rechten Auflager B bis zum Knotenpunkt III . Bei dieser Laststellung besteht aber für sämtliche durch Feld $II\ III$ gelegte Schnitte die Resultirende der äusseren Kräfte in der linksseitigen Auflagerreaction, der Grösse nach durch $a_2\ b_2$ Fig. 91a bestimmt.

Fig. 91.

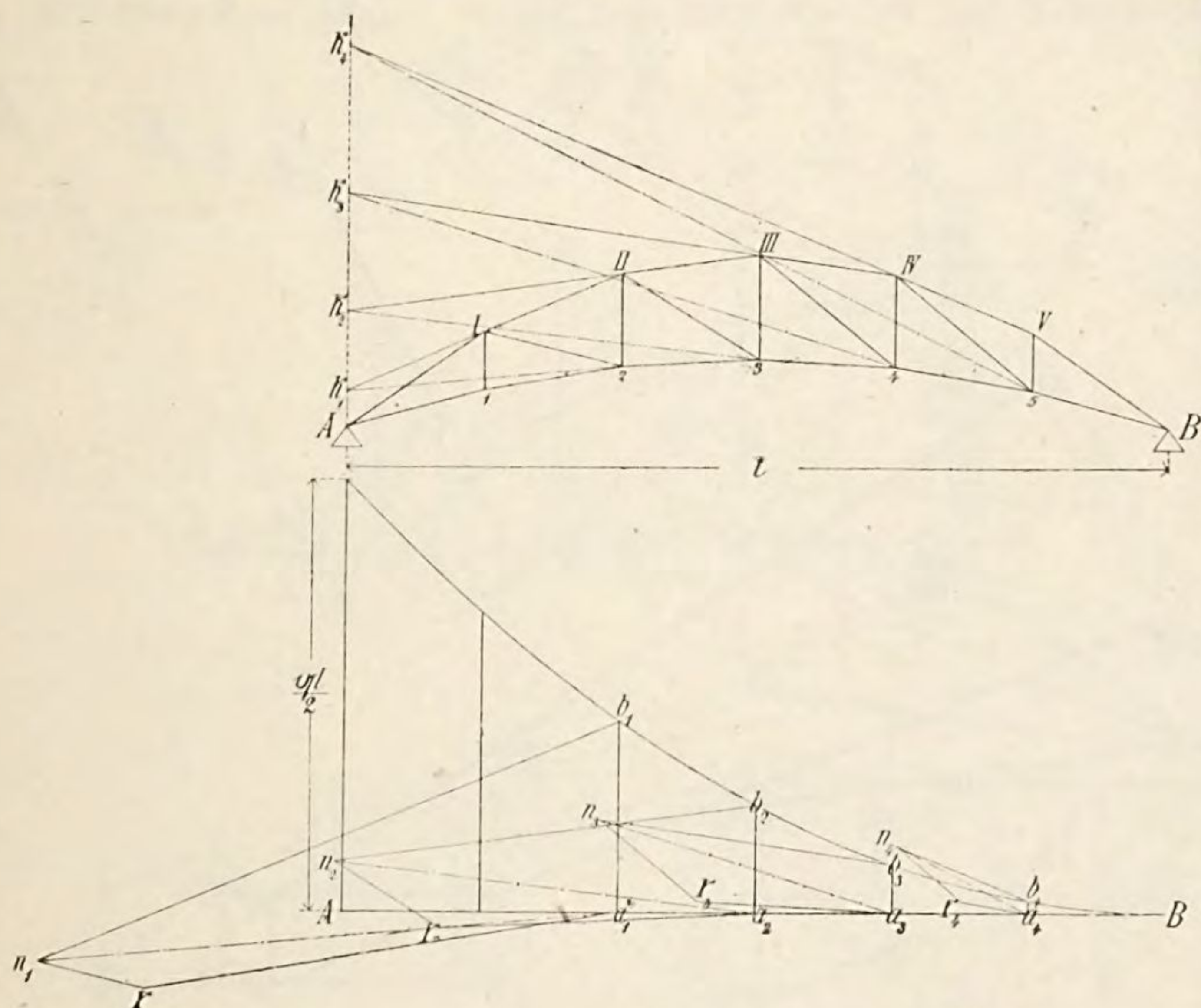


Fig. 91a.

Indem man diese wie S. 69 nach den Richtungen T, S, Z zerlegt, ergibt sich für den Stab $II\ 3$: $+Z_{\max} = n_2\ r_2$. In Fig. 91 und 91a sind auf solche Weise die grössten Zugkräfte $n_1\ r_1, n_3\ r_3, n_4\ r_4$ auch für die übrigen Diagonalen bestimmt.

Bezüglich gekreuzter Diagonalen gilt das beim parabolischen Träger Gesagte.

Verticalstäbe. Die Belastungsscheide für irgend einen Stab $IV\ 4$ (Fig. 90) ergibt sich, wenn man den Gurtungstheil 45, welcher von dem durch den Stab zu legenden Schnitt getroffen wird, bis zu den Schnittpunkten a' und b' mit den Auflagerverticalen verlängert, und wenn man die Punkte a' und b' mit den Eckpunkten III und IV des gegenüberliegenden Gurtungsstabes verbindet. Jede rechts von dem so erhaltenen Verticalschnitt J' aufgebrachte Last erzeugt Druck im Verticalstab, jede links befindliche Last Zug. (Bei von links nach rechts hin steigenden Diagonalen findet das Umgekehrte statt). Das Maximum der Zugkraft des Stabes $IV\ 4$ wird also durch ausschliessliche Belastung der Strecke $A\ J'$, das Maximum der Druckkraft durch ausschliessliche Belastung der Strecke $B\ J'$ hervorgebracht.

C. Beanspruchung durch Winddruck.

Die Ermittlung der Stabkräfte unter Einfluss des Winddruckes, welcher diesmal gegen die auf Seite des festen Auflagers befindliche Dachfläche wirkend ange-

A. Beanspruchung durch Eigengewicht, beziehungsweise totale Schneelast.

Man trägt die Knotendrucke P_1 bis P_5 auf der Verticalen 05 Fig. 94 a auf und erhält durch die Schnitte α bis η die nachverzeichneten Stabkräfte. Der letzte Schnitt η ist, wie in Fig. 94 angegeben, krummlinig zu legen, wobei sich bei bekanntem $S_4 = 0$, $Z_3 = ef$ und $P_5 = fg$ sodann $H = g5$ und $N_4 = 50 = D$ ergibt.

Fig. 94.

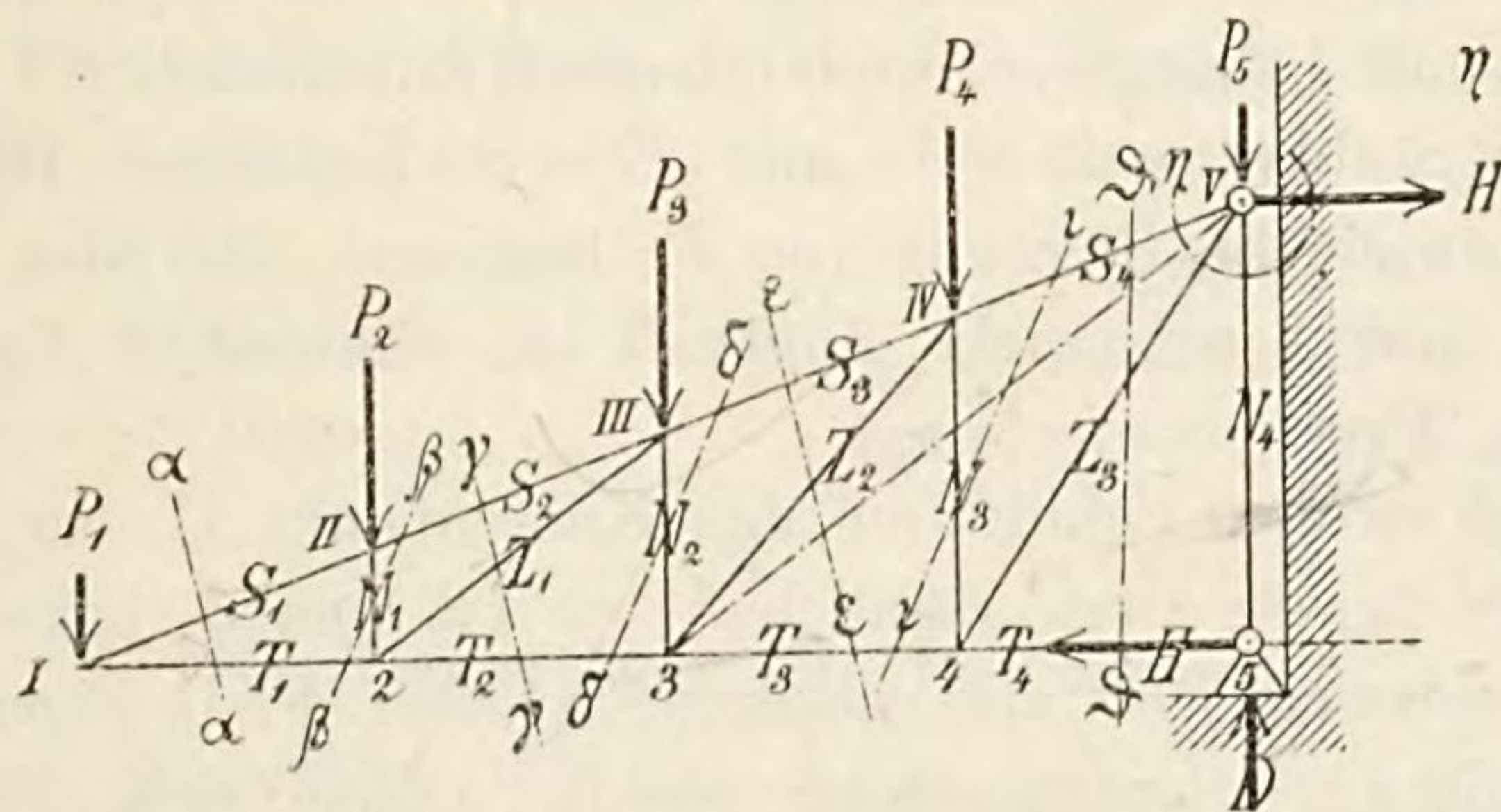
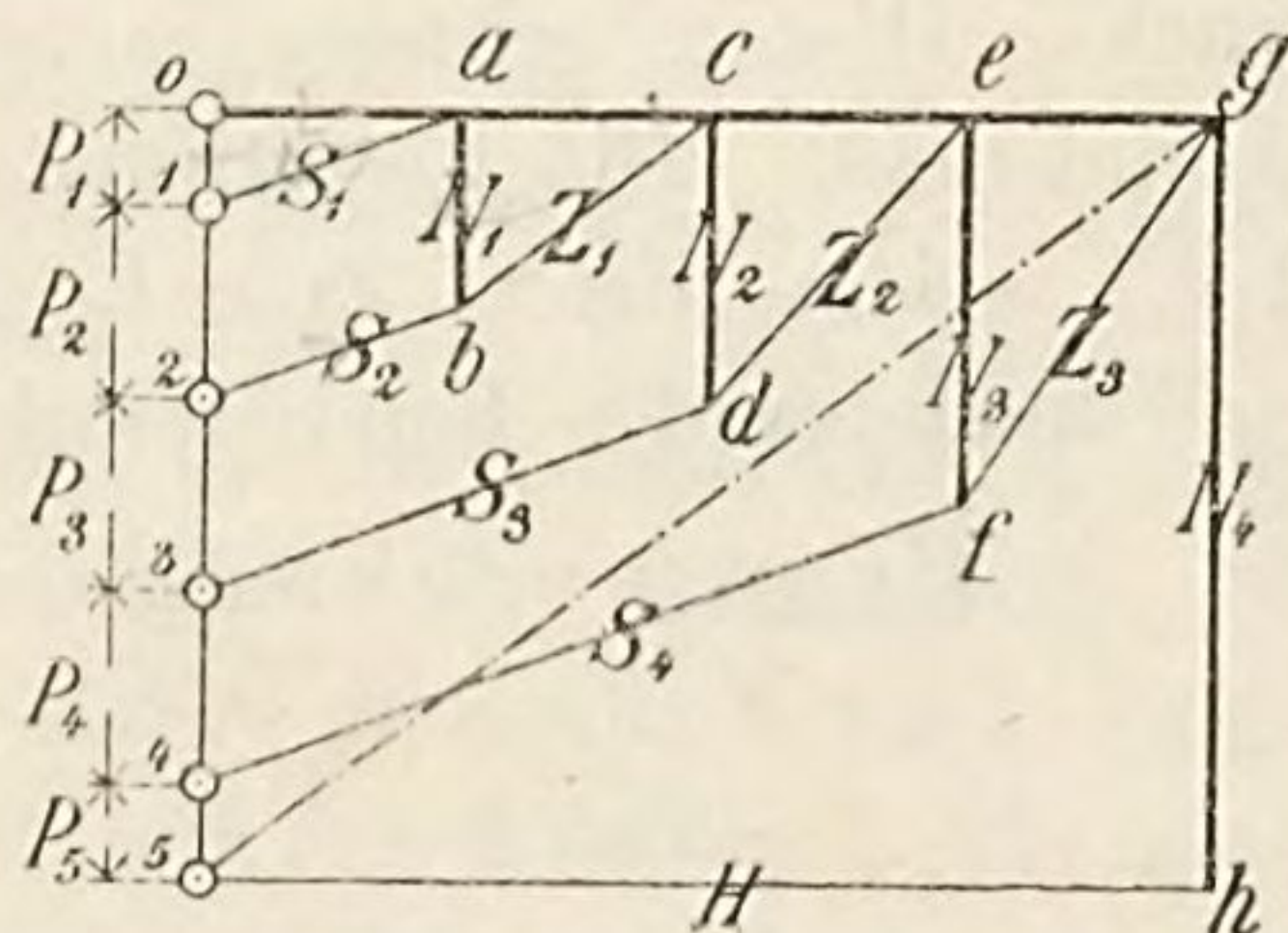
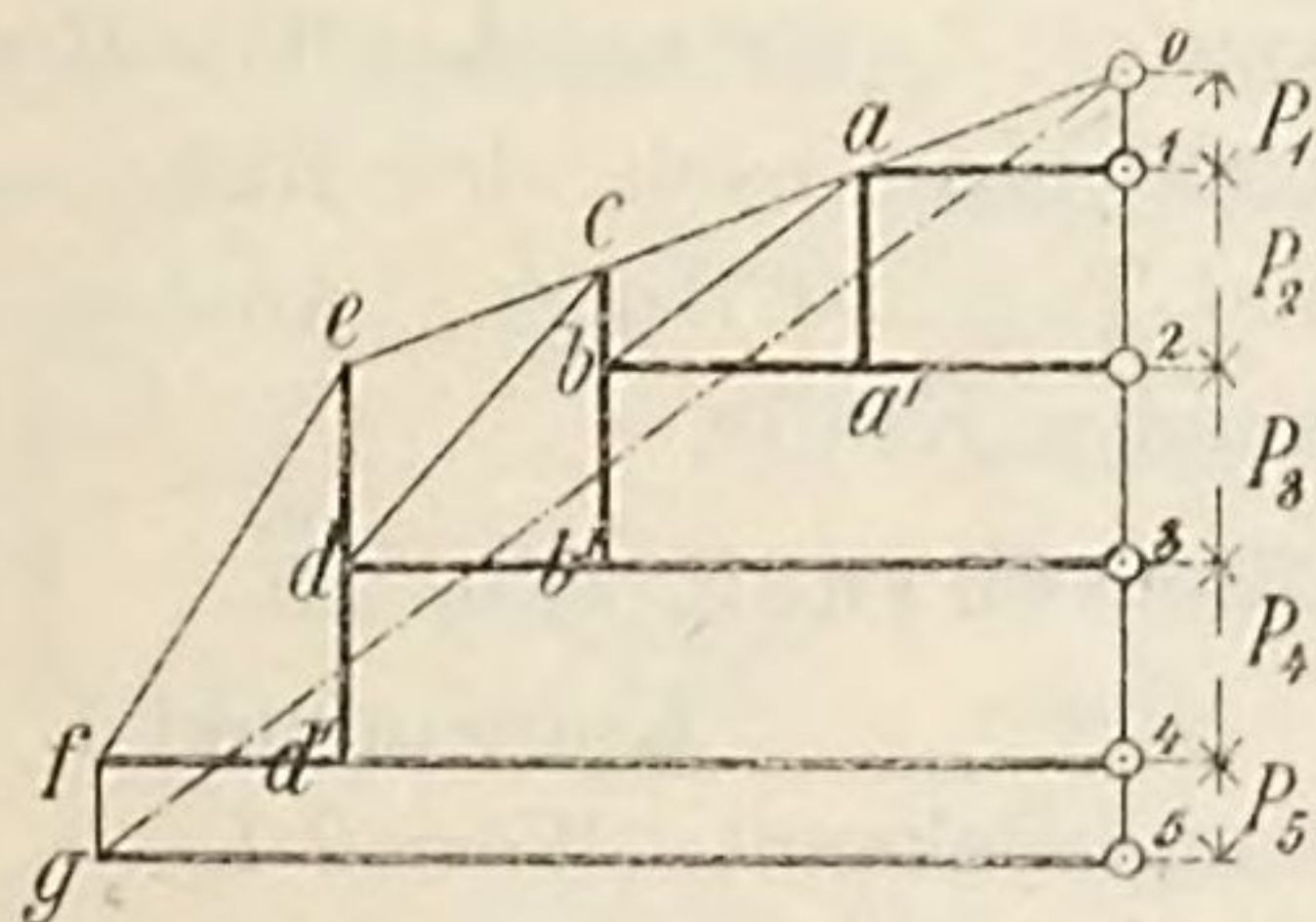


Fig. 94a.

Fig. 94b



$$\begin{array}{l}
 S_1 = a0 \\
 S_2 = a0 \\
 S_3 = c0 \\
 S_4 = e0 \\
 Z_1 = ba \\
 Z_2 = dc \\
 Z_3 = fe
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{Zug}
 \quad
 \begin{array}{l}
 T_1 = 1a \\
 T_2 = 2b \\
 T_3 = 3d \\
 T_4 = 4f = H \\
 N_1 = a'a \\
 N_2 = b'c \\
 N_3 = d'e \\
 N_4 = 50 = D
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{Druck}$$

An dieser Stelle sei noch der von Maxwell*) aus der Theorie der reciproken Figuren abgeleiteten und von Cremona**) weiter ausgebildeten Methode der Bestimmung der Stabkräfte von Fachwerkträgern erwähnt. Dieselbe unterscheidet sich von der bereits mehrfach erörterten Schnittmethode dadurch, dass sämtliche Schnitte krummlinig um die einzelnen Knotenpunkte herum, d. h. durch die an den Knotenpunkten zusammentreffenden Stäbe gelegt werden. Für jeden solchen Schnitt müssen bei Gleichgewichtszustand des Fachwerkträgers die am Knotenpunkt wirkenden Lasten und Stabkräfte im Gleichgewicht sein, es muss also das aus diesen Kräften gebildete Kräftepolygon sich schliessen.

*) On reciprocal figures and diagrams of forces. Philosophical Magazine, april 1864.

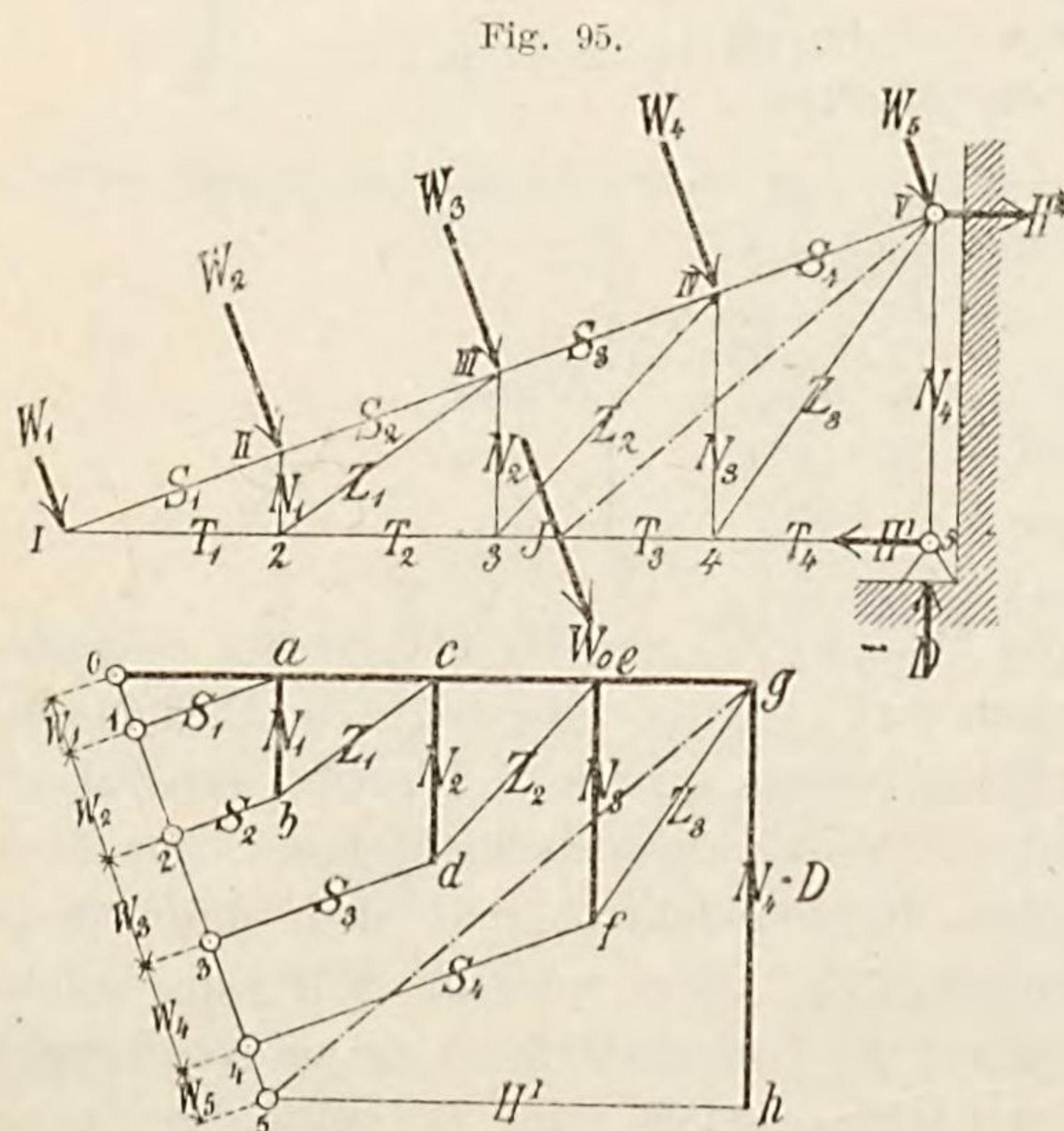
**) Le figure reciproche nella statica grafica. Milano 1872.

Beginnt man nun von einem Knotenpunkt aus, auf welchen eine äussere Kraft wirkt und in welchem sich nur zwei Stabkräfte vereinigen, so kann man, da beim Uebergang von einem Knoten zum nächstliegenden stets ein Stab den beiden gemeinschaftlich ist, durch passende Aufeinanderfolge der Schnitte und entsprechende Aneinanderreihung der Kräftepolygone leicht das Spannungsnetz erhalten.

Vom linksseitigen Ende des Trägers ausgehend denke man sich den Knotenpunkt I durch einen beliebigen, die beiden Gurtstäbe I II und I 2 treffenden Schnitt getrennt, die Knotenlast $P_1 = 0\ 1$ aufgetragen (Fig. 94b) und durch die Endpunkte von 01 Parallele zu I II und 1 2 gezogen, wodurch das Kräftedreieck 0 1 a 0 erhalten wird, das die gesuchten Stabkräfte $S_1 = 1a$ und $T_1 = a\ 0$ bestimmt. Der Umfahrungssinn des Dreiecks ist durch die Richtung von P_1 bestimmt und man erkennt, dass die Kraft S_1 , welche von A weg wirkt, Zugkraft ist, während T_1 , gegen den Knotenpunkt I gerichtet, Druck hervorbringt.

Legt man den zweiten Schnitt um den Knotenpunkt II, so sind von den hier wirkenden Kräften bereits zwei, nämlich $P_2 = 1\ 2$ und S_1 bekannt. Da Letztere Zugkraft ist, so muss sie jetzt mit entgegengesetztem Pfeil gegenüber dem vorher betrachteten Schnitt in Betracht gezogen werden. Man zieht also durch a und 2 Parallele zu N_1 und S_2 , so ergibt das Polygon $a\ 1\ 2\ b\ a$ $S_2 = 2b$ (Zug) und $N_1 = b\ a$ (Druck). Hierauf schreite man zum Knoten 2, für welchen $T_1 = 0a$ und $N_1 = ab$ bekannt sind. Die Resultierende 0b aus Beiden, nach den Richtungen von 2 III und 2 3 zerlegt, liefert $Z_1 = bc$ (Zug) und $T_2 = c\ 0$ Druck. Analog ergeben sich die auf die folgenden Knotenpunkte wirkenden Kräfte.

B. Beanspruchung durch Winddruck. Fig. 95.



Knotenpunkt I.

Bekannt: $W_1 = 0\ 1$,

unbekannt: S_1 , T_1 .

Polygon: 0 1 a 0,

daher: $S_1 = 1a$ (Zug)

$T_1 = a\ 0$ (Druck).

Knotenpunkt II.

Bekannt: $W_2 = 1\ 2$, $S_1 = a\ 1$,

unbekannt: S_2 , N_1 .

Polygon: a 1 2 b a,

daher: $S_2 = 2b$ (Zug).

$N_1 = b\ a$ (Druck).

Knotenpunkt 2.

Bekannt: $T_1 = 0\ a$, $N_1 = a\ b$,

unbekannt: Z_1 , T_2 .

Polygon: 0 b c 0,

daher: $Z_1 = b\ c$ (Zug).

$T_2 = c\ 0$ (Druck).

Knotenpunkt III.

Bekannt: $W_3 = 2\ 3$, $S_2 = b\ 2$, $Z_1 = c\ b$,

unbekannt: S_3 , N_2 .

Polygon: c b 2 3 d c,

daher: $S_3 = 3\ d$ (Zug),

$N_2 = d\ c$ (Druck).

Knotenpunkt 3.

Bekannt: $T_2 = 0\ c$, $N_2 = c\ d$,unbekannt: Z_2 , T_3 Polygon: $0\ d\ e\ 0$,daher: $Z_2 = d\ e$ (Zug) $T_3 = e\ 0$ (Druck).

Knotenpunkt IV.

Bekannt: $W_4 = 3\ 4$, $S_3 = d\ 3$, $Z_2 = e\ d$,unbekannt: S_4 , N_3 .Polygon: $e\ d\ 3\ 4\ f\ e$,daher: $S_4 = 4\ f$ (Zug), $N_3 = f\ e$ (Druck).

Knotenpunkt 4.

Bekannt: $T_3 = 0\ e$, $N_3 = e\ f$,unbekannt: Z_3 , T_4 .Polygon: $0\ f\ g\ 0$,daher: $Z_3 = f\ g$ (Zug), $T_4 = g\ 0$ (Druck) $= H'$.

Knotenpunkt V.

Bekannt: $W_5 = 4\ 5$, $S_4 = f\ 4$, $Z_3 = g\ f$,unbekannt: H'' , N_4 .Polygon: $g\ f\ 4\ 5\ h\ g$,daher: $H'' = 5\ h$, $N_4 = h\ g$ (Druck) $= D$.

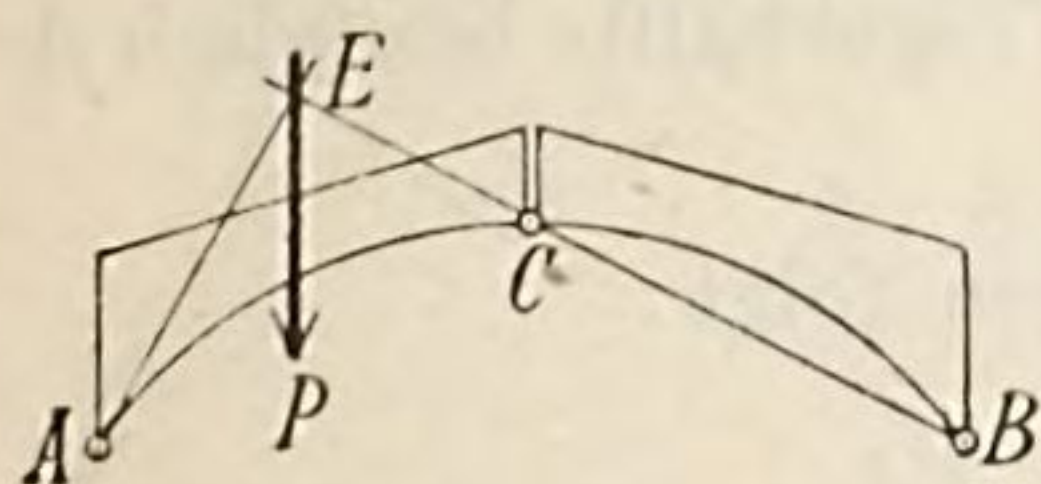
§ 9.

Der Bogenträger mit drei Gelenken.

A. Bestimmung der Auflagerreactionen.

Jede Einzellast P , welche sich an irgend einer Stelle des Trägers befindet, erzeugt Widerlagerreactionen W_1 und W_2 , in den Gelenkpunkten A und B Fig. 96

Fig. 96.



angreifend, welche, da sie der Last P das Gleichgewicht halten, in einem Punkte E der Kraftlinie P sich schneiden. Steht die Last innerhalb der linksseitigen Trägerhälfte, so geht die rechtsseitige Widerlagerreaction ausser durch B zugleich auch durch den Gelenkpunkt C , da nur durch diesen Punkt eine Wirkung

der rechten auf die linke Trägerhälfte möglich ist. Durch Verlängerung von $B\ C$ bis zum Schnitt E mit P ergibt sich dann auch die Richtung $A\ E$ der linken Widerlagerreaction.

Fig. 97.

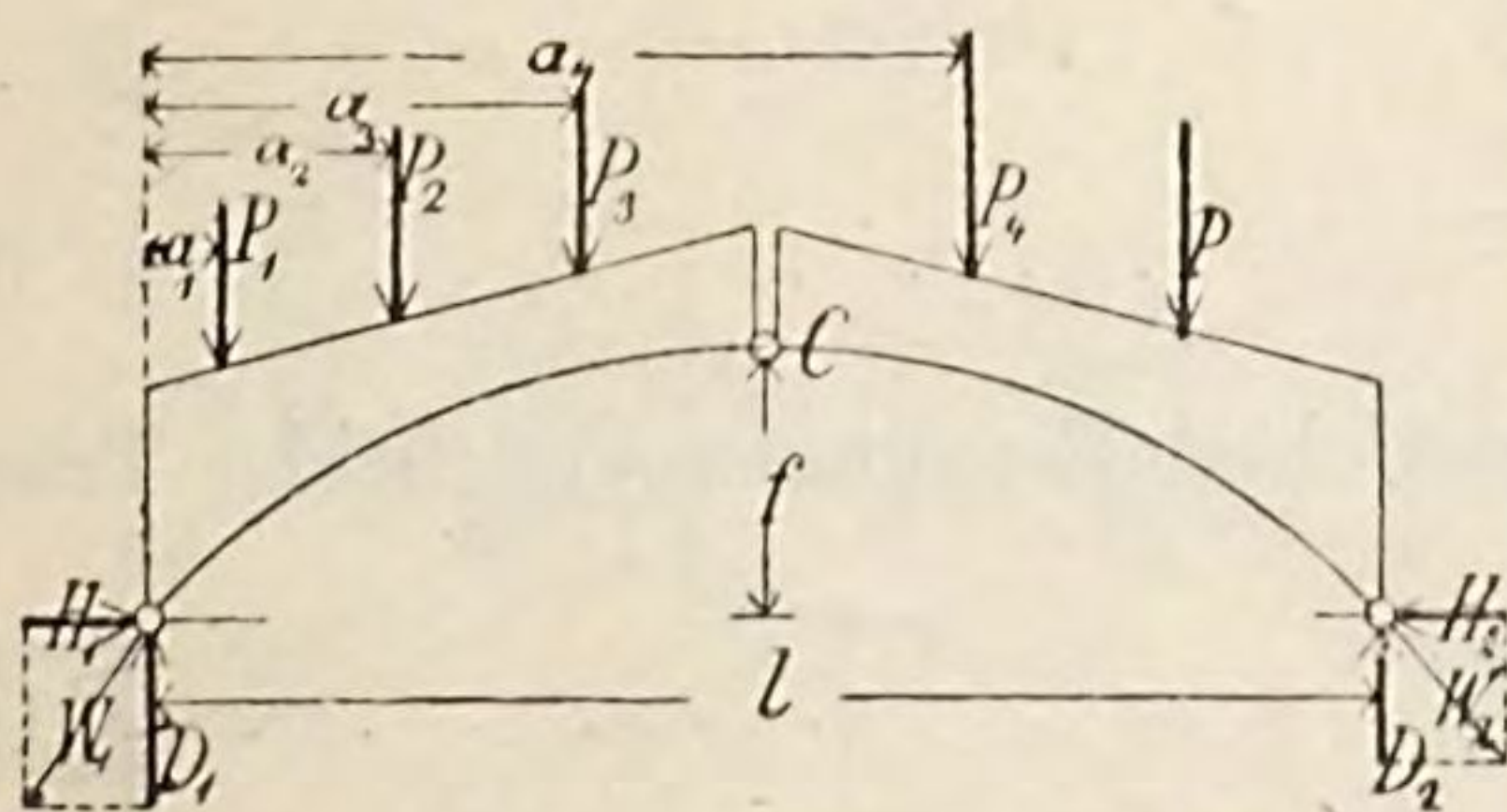
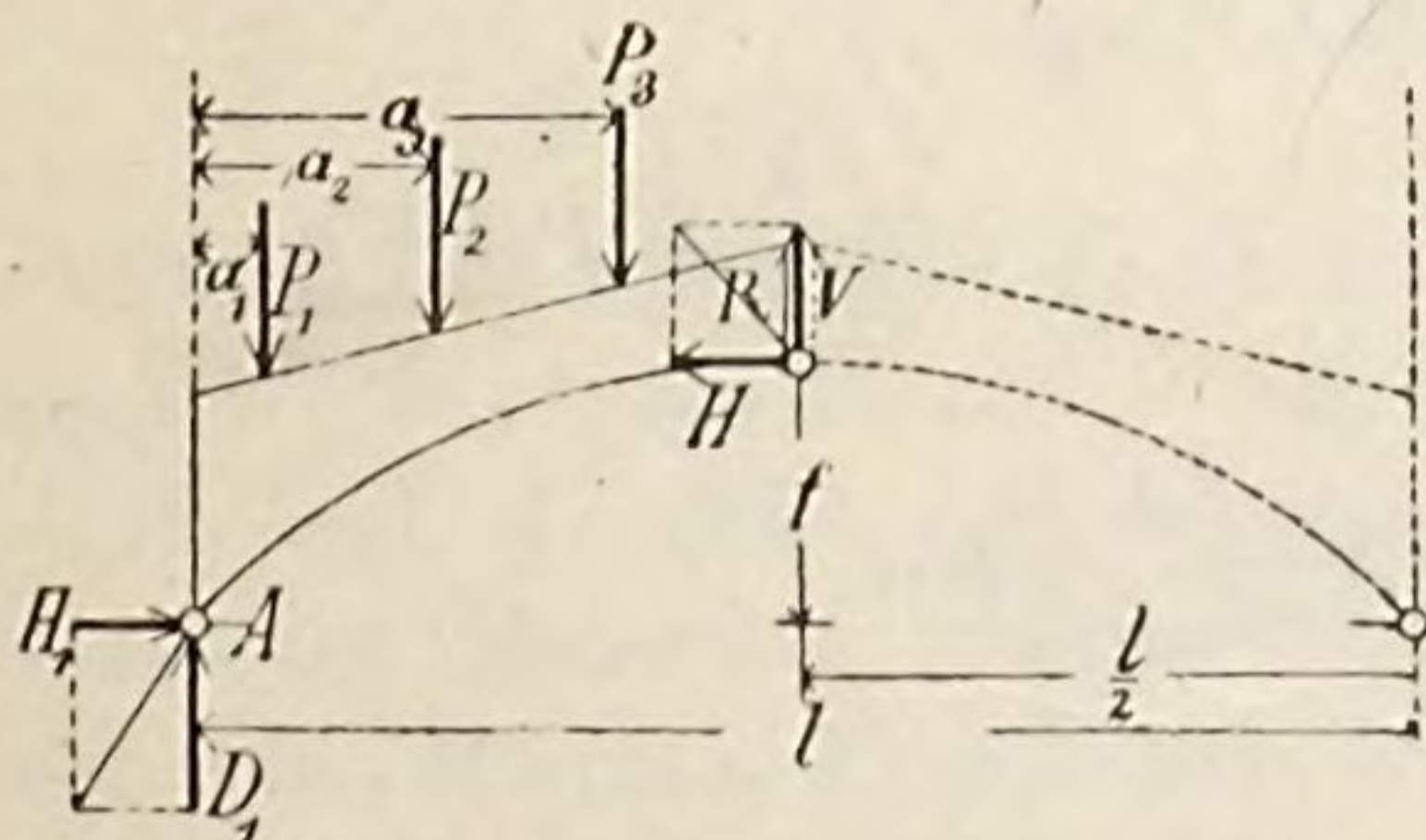


Fig. 98.



Befindet sich umgekehrt die Last auf der rechtsseitigen Trägerhälfte, so wirkt die linke Widerlagerreaction in der Geraden $A\ C$ und der Schnitt E dieser Geraden mit der Lastverticalen bestimmt die Richtung $E\ B$ der rechtsseitigen Widerlagerreaction.

Um bei beliebiger verticaler Belastung Fig. 97 die Auflagerreactionen W_1 und W_2 zu bestimmen, zerlege man dieselben zunächst in ihre Horizontal- und Verticalcomponenten H_1 , D_1 und H_2 , D_2 Fig. 97. Indem man sodann den Gleichgewichtszustand der linken Trägerhälfte betrachtet, ersetze man daselbst die Funktion der rechten Hälfte durch eine in C wirkende Kraft

R , deren Horizontal- und Verticalprojection H und V seien Fig. 98. Für den Drehpunkt A hat man sodann als Gleichgewichtsbedingung:

$$Hf + V \cdot \frac{l}{2} - \sum_0^{\frac{l}{2}} P a = 0,$$

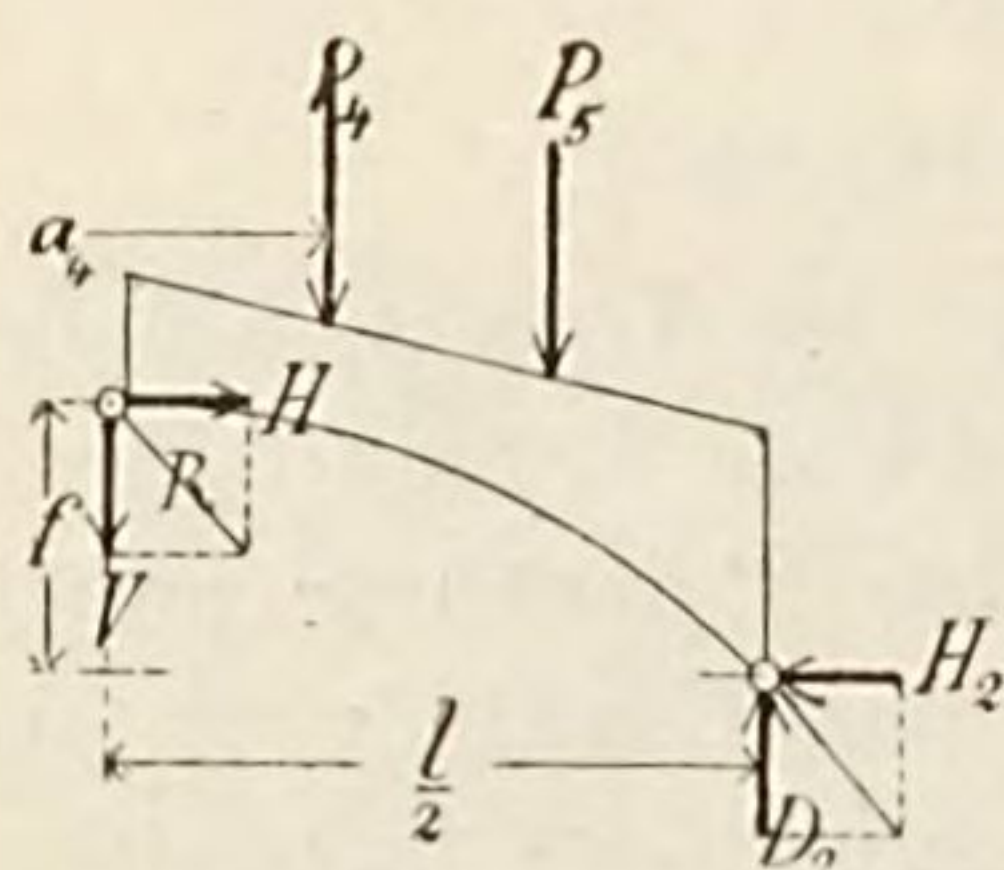
wobei die Entfernungen der einzelnen Lasten vom linken Auflager mit $a_1, a_2 \dots$

bezeichnet sind und demnach $\sum_0^{\frac{l}{2}} P a$ die Summe der statischen Momente sämtlicher Lasten der linken Trägerhälfte bezüglich des linken Auflagers vorstellt.

Denkt man sich hierauf auch die rechtsseitige Trägerhälfte ins freie Gleichgewicht gebracht, wobei, um die Wirkung des linken Trägertheils zu ersetzen, in C die nämliche Kraft R , nur im entgegengesetzten Sinne, anzubringen ist Fig. 99, so erhält man für den Drehpunkt B

Fig. 99.

$$Hf - V \frac{l}{2} - \sum_{\frac{l}{2}}^l P (l - a) = 0,$$



worin $\sum_{\frac{l}{2}}^l P (l - a)$ die Summe der statischen Momente sämtlicher Lasten der rechten Trägerhälfte bezüglich des rechten Auflagers bedeutet.

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$H = \frac{\sum_0^{\frac{l}{2}} P a + \sum_{\frac{l}{2}}^l P (l - a)}{2f} \dots \dots \dots (119)$$

und
$$V = \frac{\sum_0^{\frac{l}{2}} P a - \sum_{\frac{l}{2}}^l P (l - a)}{l} \dots \dots \dots (120)$$

Unter Anwendung der übrigen Gleichgewichtsbedingungen auf beide Trägerhälften ergibt sich jetzt:

$$H = H_1 = H_2, \dots \dots \dots (121)$$

$$\text{ferner } D_1 = \sum_0^{\frac{l}{2}} P - V = \frac{\sum_0^{\frac{l}{2}} P l - \sum_0^{\frac{l}{2}} P a + \sum_{\frac{l}{2}}^l P (l - a)}{l} = \frac{1}{l} \sum_0^l P (l + a) \dots \dots (122)$$

endlich
$$D_2 = \sum_{\frac{l}{2}}^l P + V = \frac{1}{l} \sum_{\frac{l}{2}}^l P a \dots \dots \dots (123)$$

Die Verticalcomponenten der Auflagerreactionen sind somit identisch mit den Auflagerreactionen des gleich belasteten Balkenträgers.

Nachdem H_1 , D_1 , H_2 und D_2 durch die Gleichungen 119 bis 123 bestimmt, ergeben sich die Widerlagerreactionen W_1 und W_2 und deren Winkel α_1 und α_2 gegen den Horizont wie folgt:

$$W_1 = \sqrt{H^2 + D_1^2}, \quad W_2 = \sqrt{H^2 + D_2^2}$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{D_1}{H}, \quad \tan \alpha_2 = \frac{D_2}{H}.$$

Bei totaler Belastung des Trägers durch gleichmässig vertheilte Last q pro Längeneinheit ist:

$$\sum_0^{\frac{l}{2}} P a = \frac{q l^2}{8} = \sum_{\frac{l}{2}}^l P (l - a),$$

und

$$\sum_0^{\frac{l}{2}} P a = \frac{q l^2}{2} = \sum_0^{\frac{l}{2}} P (l - a),$$

daher

$$H = \frac{q l^2}{8f}, \quad \dots \dots \dots (124)$$

$$D_1 = \frac{q l}{2} = D_2$$

und

$$V = 0.$$

Ist nur eine Trägerhälfte, z. B. die Linke AC belastet, (Fig. 100) so ist:

$$\sum_0^{\frac{l}{2}} P a = \frac{q l^2}{8}, \quad \sum_{\frac{l}{2}}^l P (l - a) = 0, \quad \sum_0^{\frac{l}{2}} P a = \frac{q l^2}{8}, \quad \sum_0^{\frac{l}{2}} P (l - a) = 3 \frac{q l^2}{8},$$

Fig. 100.

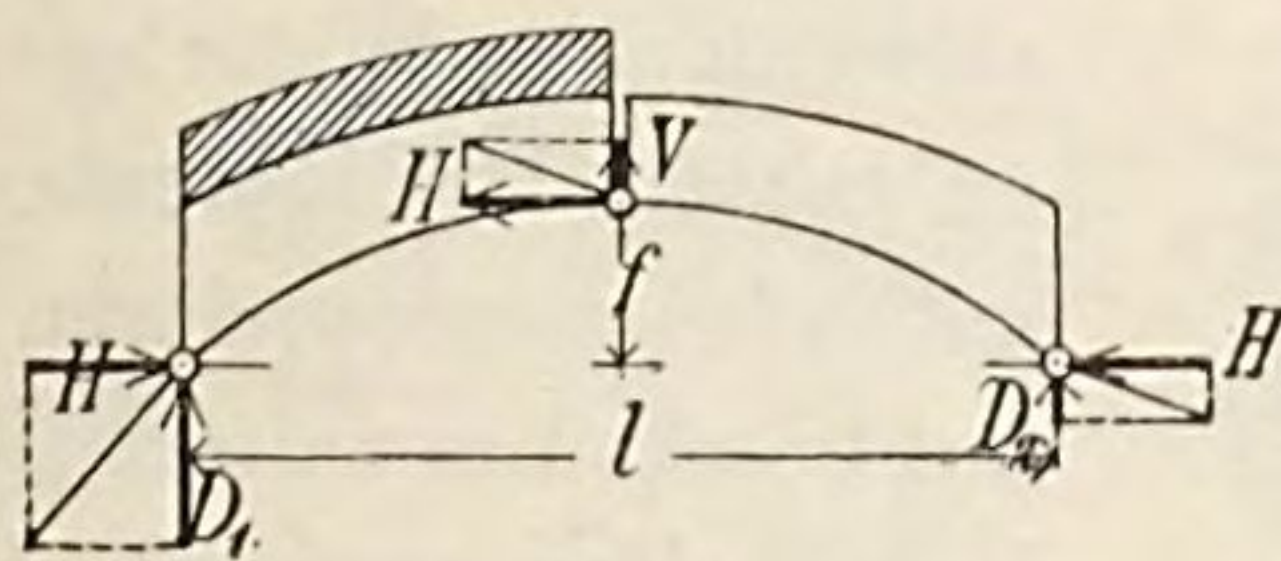
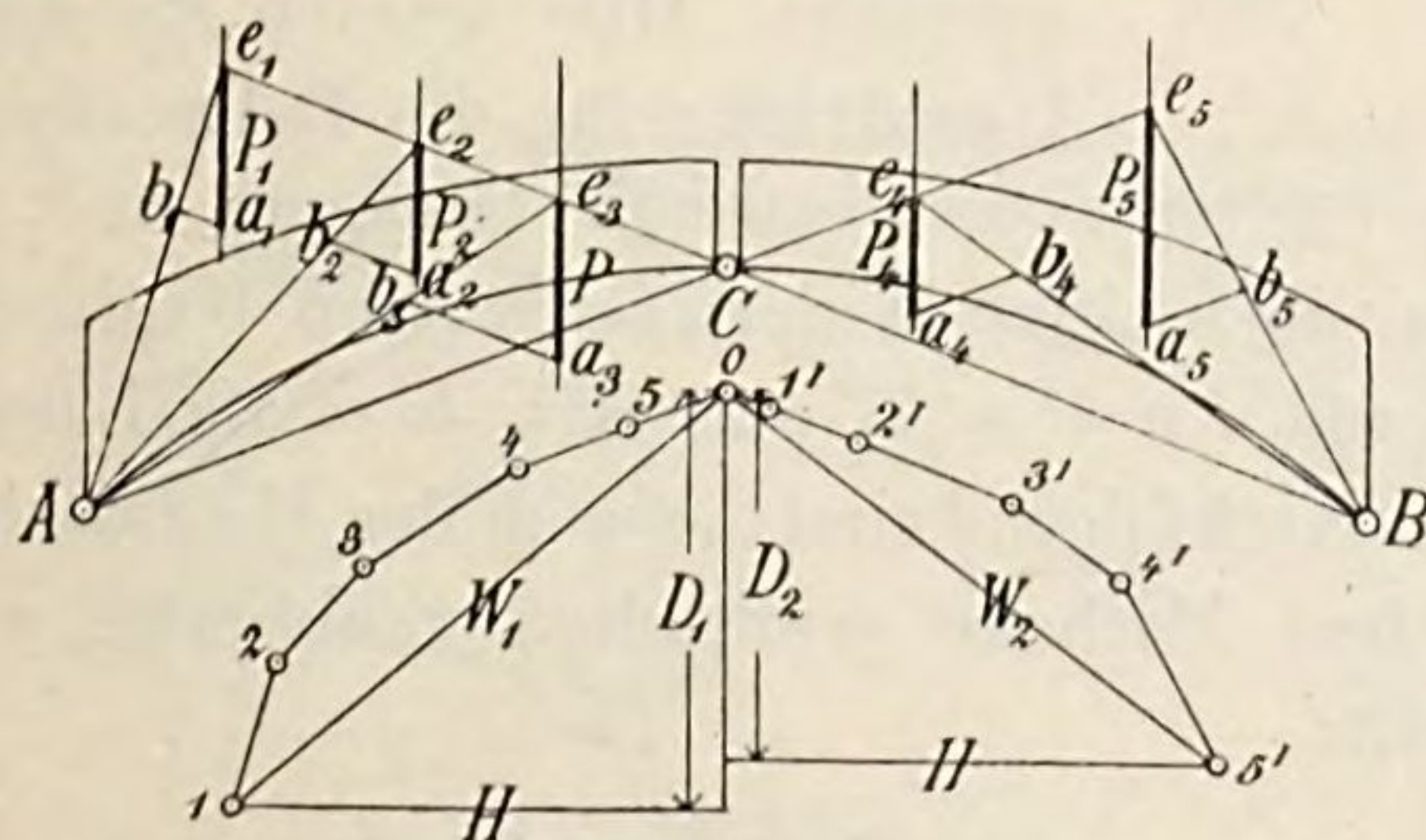


Fig. 101.



$$\text{daher} \quad H = \frac{q l^2}{16f}, \quad \dots \dots (125)$$

$$D_1 = \frac{3}{8} q l, \quad \dots \dots (126)$$

$$D_2 = \frac{1}{8} q l, \quad \dots \dots (127)$$

$$\text{und} \quad V = \frac{1}{8} q l \quad \dots \dots (128)$$

Graphische Bestimmung der Auflagerreactionen.

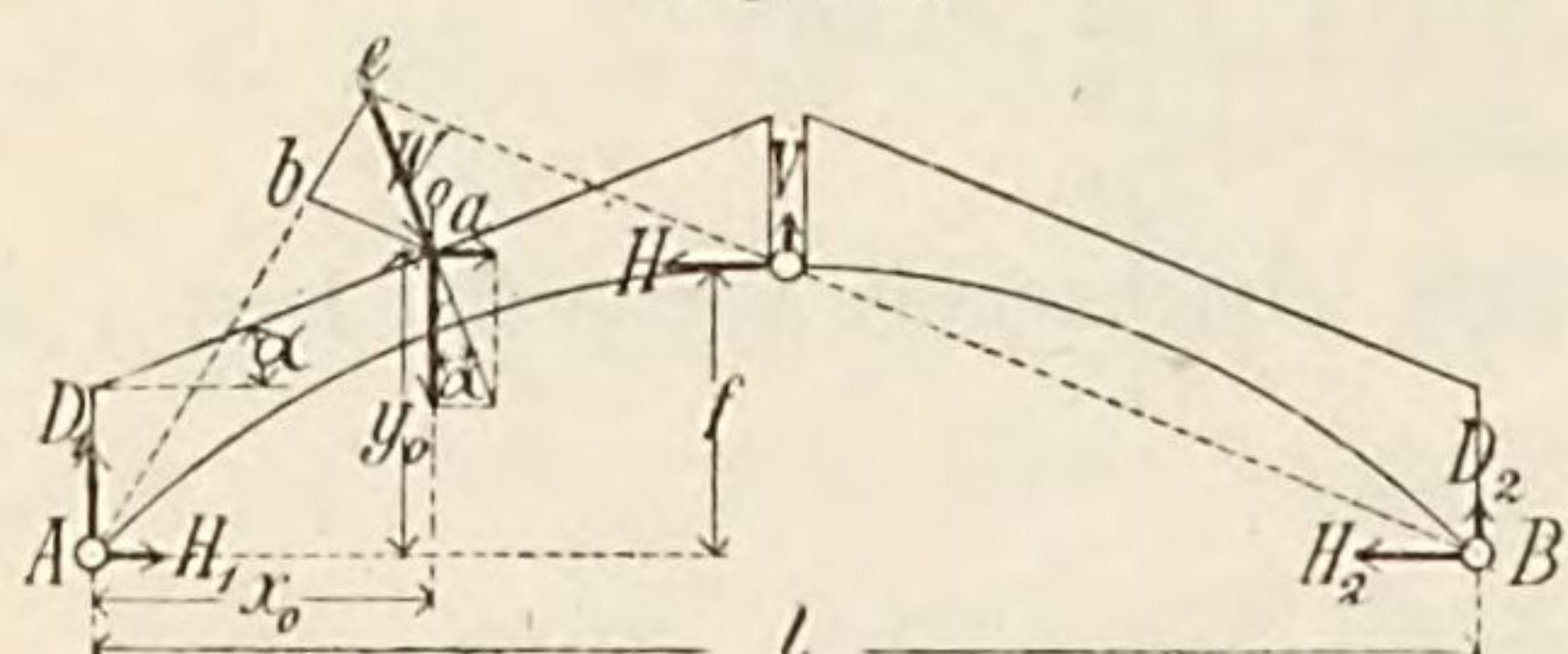
Man bestimmt für sämtliche Lasten einzeln die beiderseitigen Widerlagerreactionen ($b_1 e_1$ und $a_1 b_1$ für P_1 , $b_2 e_2$ und $a_2 b_2$ für P_2 $a_5 b_5$ und $b_5 e_5$ für P_5) Fig. 101 und erhält durch Aneinanderreihung der zusammengehörigen Kraftlängen $W_1 = 10$ und $W_2 = 5'0$. Zur Controle dient, dass die Horizontalprojectionen von W_1 und W_2 gleich sein müssen.

Ist die Belastung gleichmässig vertheilt oder besteht sie aus gleichen und gleichweit entfernten Einzellasten, so empfiehlt es sich wohl, die Lasten der linken sowie die der rechten Trägerhälfte zu ihren Resultirenden zusammenzufassen und im Uebrigen wie angegeben zu verfahren.

Auflagerreactionen des Winddrucks.

Man zerlegt die Resultirende W_0 des auf die Dachfläche wirkenden Winddrucks in $W_0 \cos \alpha$ und $W_0 \sin \alpha$ Fig. 102 und erhält wie oben durch Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen beider Trägerhälften:

Fig. 102.



$$H f + V \frac{l}{2} - W_0 y_0 \sin \alpha - W_0 x_0 \cos \alpha = 0$$

$$\text{und } H f - V \frac{l}{2} = 0,$$

$$\text{daher } H = \frac{W_0 y_0 \sin \alpha + W_0 x_0 \cos \alpha}{2 f} \quad (129)$$

und

$$V = \frac{W_0 y_0 \sin \alpha + W_0 x_0 \cos \alpha}{l} \quad (130)$$

Ferner

$$H_1 = H - W_0 \sin \alpha, \quad (131)$$

$$H_2 = H, \quad (132)$$

$$D_1 = W_0 \cos \alpha - V \quad (133)$$

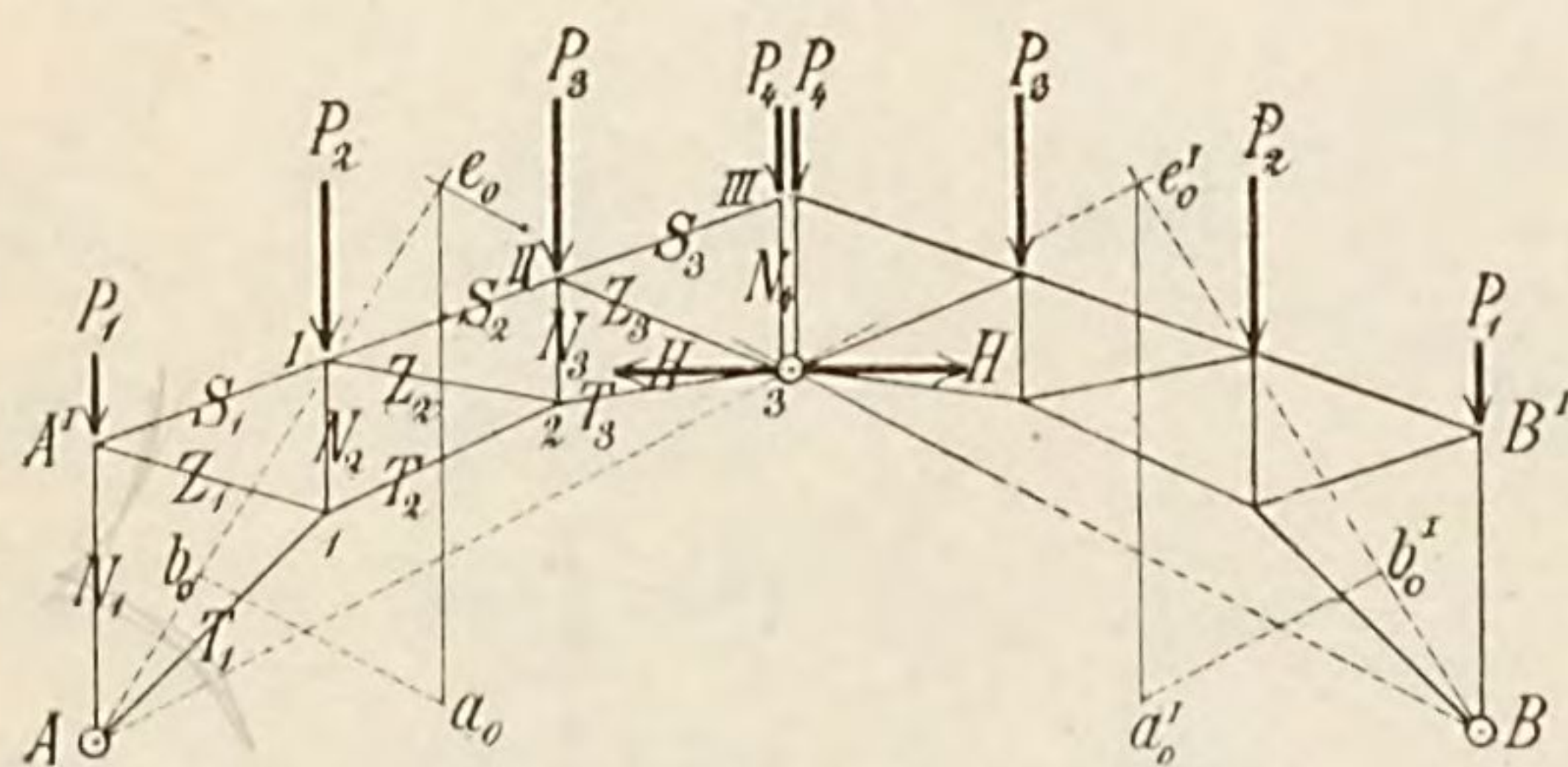
und

$$D_2 = V \quad (134)$$

Durch Construction findet man die durch W_0 erzeugten Widerlagerreactionen $W_1 = b e$ und $W_2 = a b$ wie in Fig. 102 angegeben.

B. Beanspruchung durch Eigengewicht und totale Schneelast.

Fig. 103.



Durch Rechnung können die Stabkräfte nach vorheriger Bestimmung der Widerlagerreactionen mittels der Momentenmethode gefunden werden, deren Anwendung hier keiner weiteren Erklärung bedarf. Das graphische Verfahren ist in Fig. 103 zur Darstellung gebracht. Hier wurden die Auflagerdrücke für die Belastungen

beider Trägerhälften zuerst getrennt bestimmt und so die gesamte linksseitige Widerlagerreaction W_1 durch Vereinigung von $I n = a' b_0'$ und $n 0 = b_0 e_0$ als Länge $I 0$ gefunden. Nachfolgend sind die nach der Maxwell-Cremona'schen Methode ermittelten Stabkräfte zusammengestellt:

Knotenpunkt A.

Bekannt: $W_1 = I 0$,unbekannt: N_1, T_1 .Polygon: $I 0 a I$,daher: $N_1 = 0 a$ (Druck) $T_1 = a I$ (Druck).

Knotenpunkt A'.

Bekannt: $P_1 = 0 1, N_1 = a 0$,unbekannt: S_1, Z_1 .Polygon: $a 1 b a$,daher: $S_1 = 1 b$ (Zug) $Z_1 = b a$ (Druck).

Knotenpunkt 1.

Bekannt: $T_1 = I a$, $Z_1 = a b$,unbekannt: N_2 , T_2 .Polygon: $I a b c I$,daher: $N_2 = b c$ (Druck) $T_2 = c I$ (Druck).

Knotenpunkt I.

Bekannt: $P_2 = 1 2$, $S_1 = b 1$, $N_2 = c b$,unbekannt: S_2 , Z_2 .Polygon: $c b 1 2 d c$,daher: $S_2 = 2 d$ (Zug) $Z_2 = d c$ (Zug).

Knotenpunkt 2.

Bekannt: $T_2 = I c$, $Z_2 = c d$,unbekannt: N_3 , T_3 .Polygon: $I c d e I$,daher: $N_3 = d e$ (Druck) $T_3 = e I$ (Druck).

Knotenpunkt II.

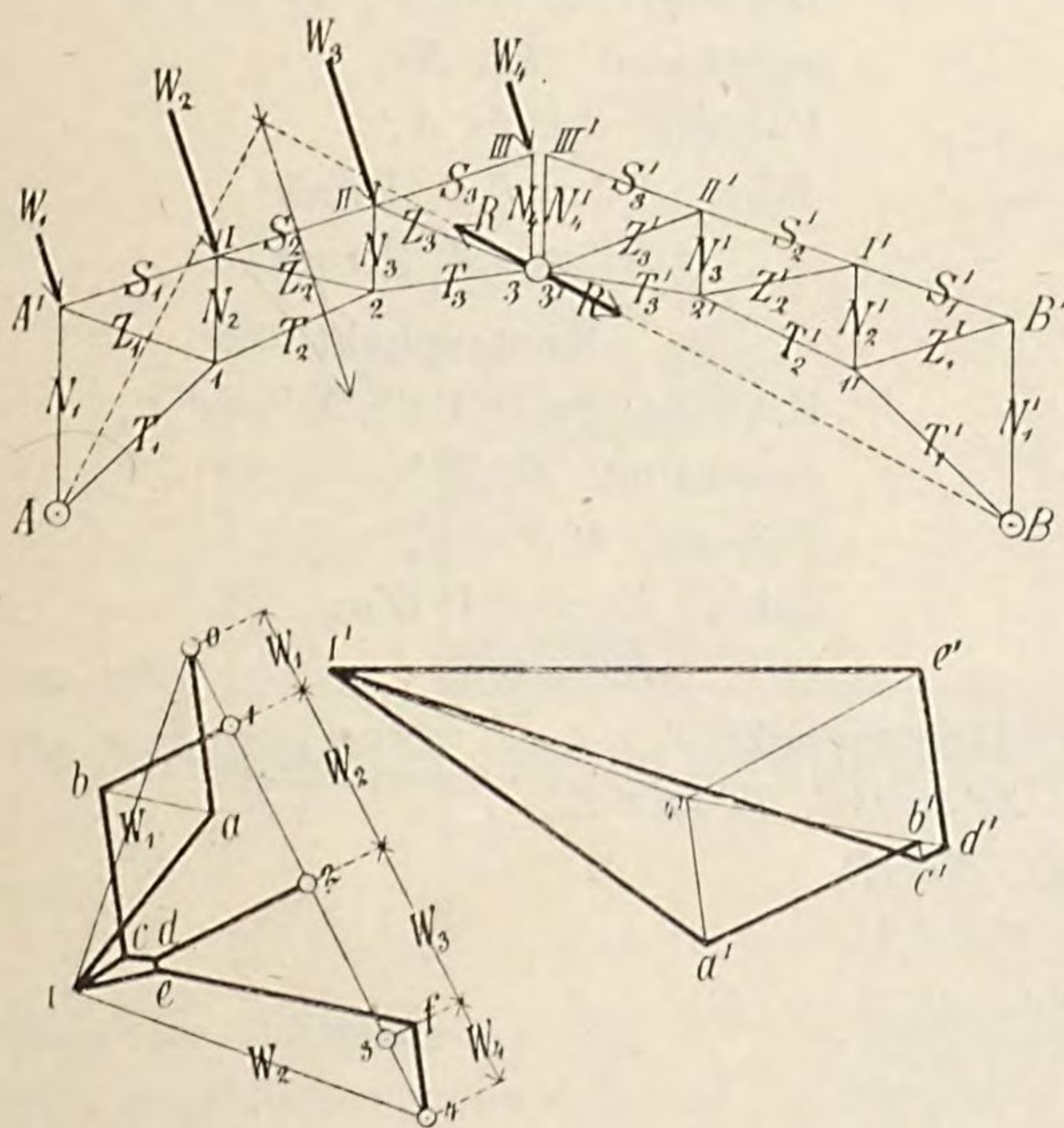
Bekannt: $P_3 = 2 3$, $S_2 = d 2$, $N_3 = e d$,unbekannt: Z_3 , S_3 .Polygon: $e d 2 3 e$,daher: $Z_3 = 3 e$ (Zug) $S_3 = 0$.

Knotenpunkt 3.

Bekannt: $T_3 = I e$, $Z_3 = e 3$,unbekannt: N_4 , H .Polygon: $I e 3 4 I$,daher: $N_4 = 3 4 = P_4$ (Druck) $H = 4 I$.

C. Beanspruchung durch Winddruck.

Fig. 104.



Wir nehmen an, die linksseitige Dachfläche sei durch den Wind in Angriff genommen, dessen Resultierende 04 (Fig. 104) am linken und rechten Widerlager die Reactionen $W_1 = I 0$ und $W_2 = 4 I$ erzeugt. Unter diesem Einfluss ergeben sich nachstehende Stabkräfte:

Linke Trägerhälfte.

Knotenpunkt A.

Bekannt $W_1 = I 0$,unbekannt: N_1 , T_1 .Polygon: $I 0 a I$,daher: $N_1 = 0 a$ (Druck) $T_1 = a I$ (Druck).

Knotenpunkt A'.

Bekannt: $W_1 = 0 1$, $N_1 = a 0$,unbekannt: S_1 , Z_1 .Polygon: $a 0 1 b a$,daher: $S_1 = 1 b$ (Druck) $Z_1 = b a$ (Zug).

Knotenpunkt 1.

Bekannt: $T_1 = I a$, $Z_1 = a b$,unbekannt: N_2 , T_2 .Polygon: $I a b c I$,daher: $N_2 = b c$ (Druck) $T_2 = c I$ (Druck).

Knotenpunkt *I*.Bekannt: $W_2 = 1\ 2$, $S_1 = b\ 1$, $N_2 = c\ b$,unbekannt: S_2 , Z_2 .Polygon: $c\ b\ 1\ 2\ d\ c$,daher: $S_2 = 2\ d$ (Druck) $Z_2 = d\ c$ (Druck)

Knotenpunkt 2.

Bekannt: $T_2 = I\ c$, $Z_2 = c\ d$,unbekannt: N_3 , T_3 .Polygon: $I\ c\ d\ e\ I$,daher: $N_3 = d\ e$ (Druck) $T_3 = e\ I$ (Druck).Knotenpunkt *II*.Bekannt: $W_3 = 2\ 3$, $S_2 = d\ 2$, $N_3 = e\ d$ unbekannt: S_3 , Z_3 .Polygon: $e\ d\ 2\ 3\ f\ e$,daher: $S_3 = 3\ f$ (Zug) $Z_3 = f\ e$ (Druck).

Knotenpunkt 3.

Bekannt: $T_3 = I\ e$, $Z_3 = e\ f$,unbekannt: N_4 , R .Polygon: $I\ e\ f\ 4\ I$,daher: $N_4 = f\ 4$ (Druck) $R = 4\ I (= W_2)$.

Rechte Trägerhälfte:

Knotenpunkt *B*.Bekannt: $W_2 = 4'\ I'$,unbekannt: T_1' , N_1' .Polygon: $4'\ I'\ a'\ 4'$,daher: $T_1' = I'\ a'$ (Druck) $N_1' = a'\ 4'$ (Zug).Knotenpunkt *B'*.Bekannt: $N_1' = 4'\ a'$,unbekannt: Z_1' , S_1' .Polygon: $4'\ a'\ b'\ 4'$,daher: $Z_1' = a'\ b'$ (Druck) $S_1' = b'\ 4'$ (Zug).

Knotenpunkt 1'.

Bekannt: $Z_1' = b'\ a'$, $T_1' = a'\ I'$,unbekannt: T_2' , N_2' .Polygon: $b'\ a'\ I'\ c'\ b'$,daher: $T_2' = I'\ c'$ (Druck) $N_2' = c'\ b'$ (Zug).Knotenpunkt *I'*.Bekannt: $S_1' = 4'\ b'$, $N_2' = b'\ c'$,unbekannt: Z_2' , S_2' .Polygon: $4'\ b'\ c'\ d'\ 4'$,daher: $Z_2' = c'\ d'$ (Druck) $S_2' = d'\ 4'$ (Zug).

Knotenpunkt 2'.

Bekannt: $Z_2' = d'\ c'$, $T_2' = c'\ I'$,unbekannt: T_3' , N_3' .Polygon: $d'\ c'\ I'\ e'\ d'$,daher: $T_3' = I'\ e'$ (Druck) $N_3' = e'\ d'$ (Druck).Knotenpunkt *II'*.Bekannt: $S_2' = 4'\ d'$, $N_3' = d'\ e'$,unbekannt: Z_3' , S_3' .Polygon: $4'\ d'\ e'\ 4'$,daher: $Z_3' = e'\ 4'$ (Zug), $S_3' = 0$

Knotenpunkt 3'.

Bekannt: $Z_3' = 4'\ e'$, $T_3' = e'\ I'$,unbekannt: N_4' , R .Polygon: $4'\ e'\ I'\ 4'$,daher: $N_4' = 0$ $R = I'\ 4'$.*B.* Ungünstigste Beanspruchung durch partielle Schneebelastung.

Obere Gurtung.

Um für einen Stab *I II* Fig. 105 der oberen Gurtung eines Feldes die Belastungsscheide zu erhalten, ziehe man eine Gerade vom zunächst gelegenen Widerlager *A* nach dem Schnitt 2 der beiden anderen Stäbe des betreffenden Feldes und bestimme den Schnittpunkt *u* dieser Geraden mit der Verbindungslinie *BC*. Jede in der Verticalen durch *u* wirkende Einzellast bewirkt in *I II* die Spannung gleich Null,

Fig. 105.

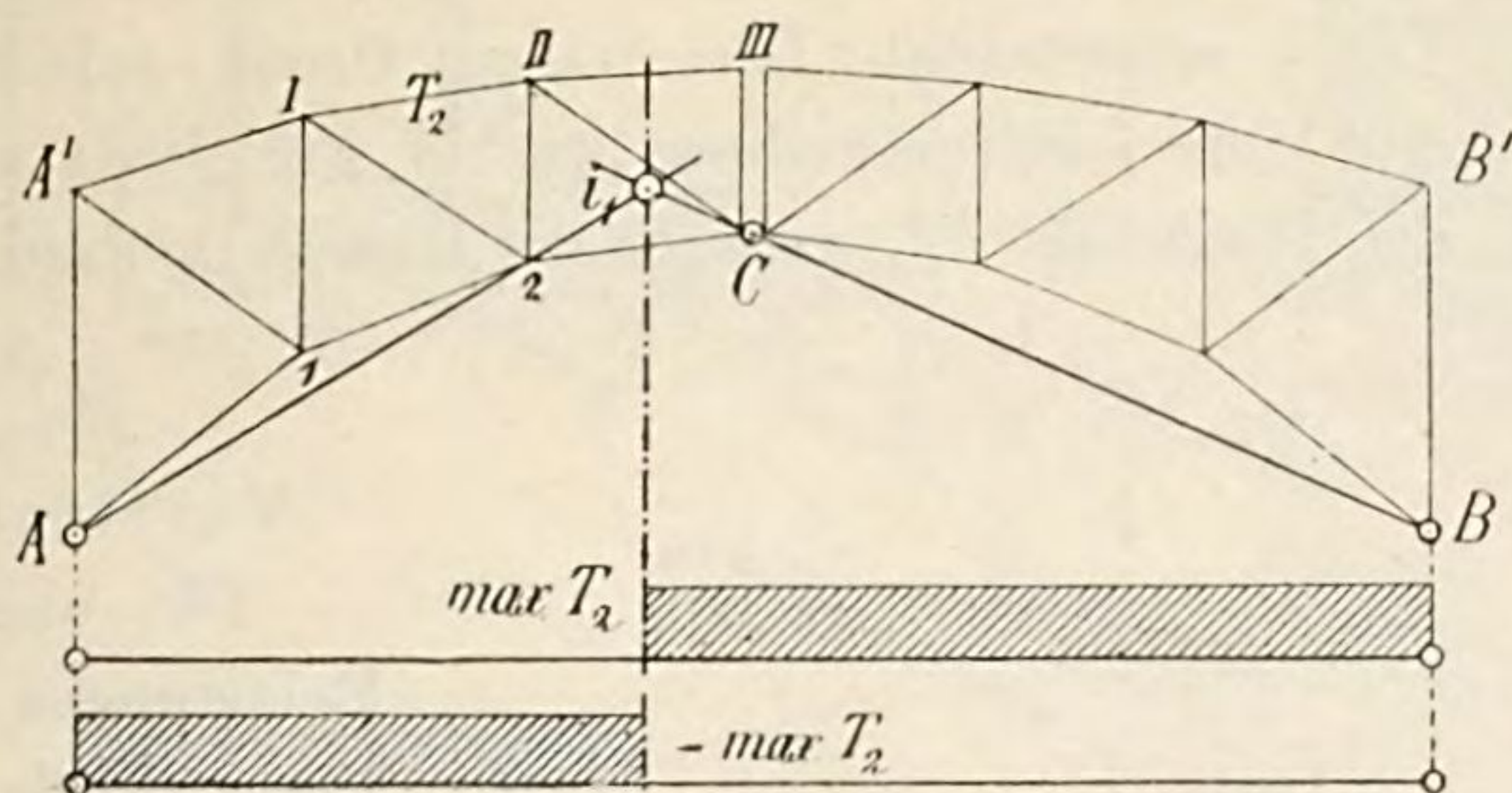


Fig. 105a.

Fig. 105b.

Fig. 106.

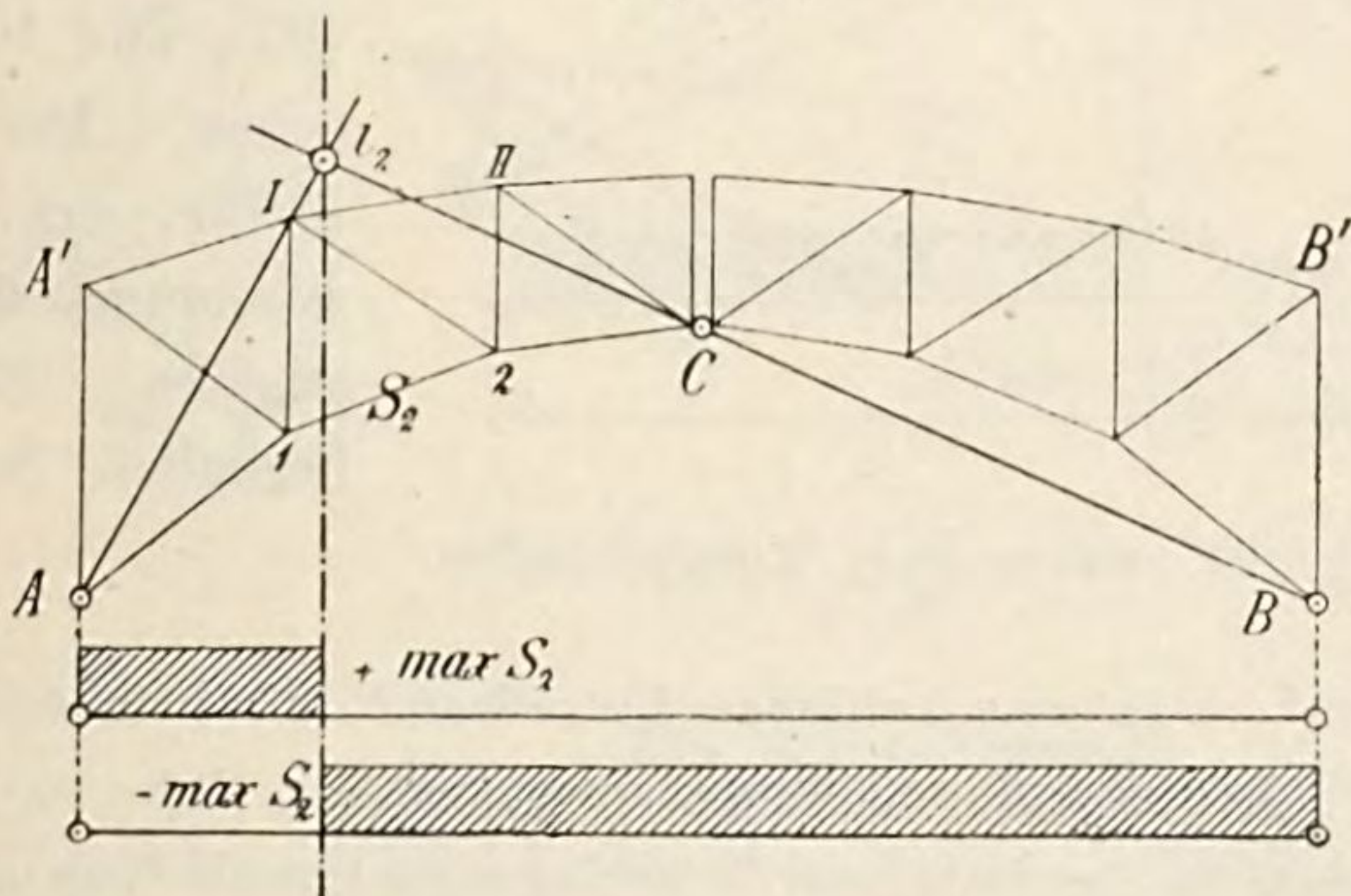


Fig. 106a.

Fig. 106b.

Fig. 107.

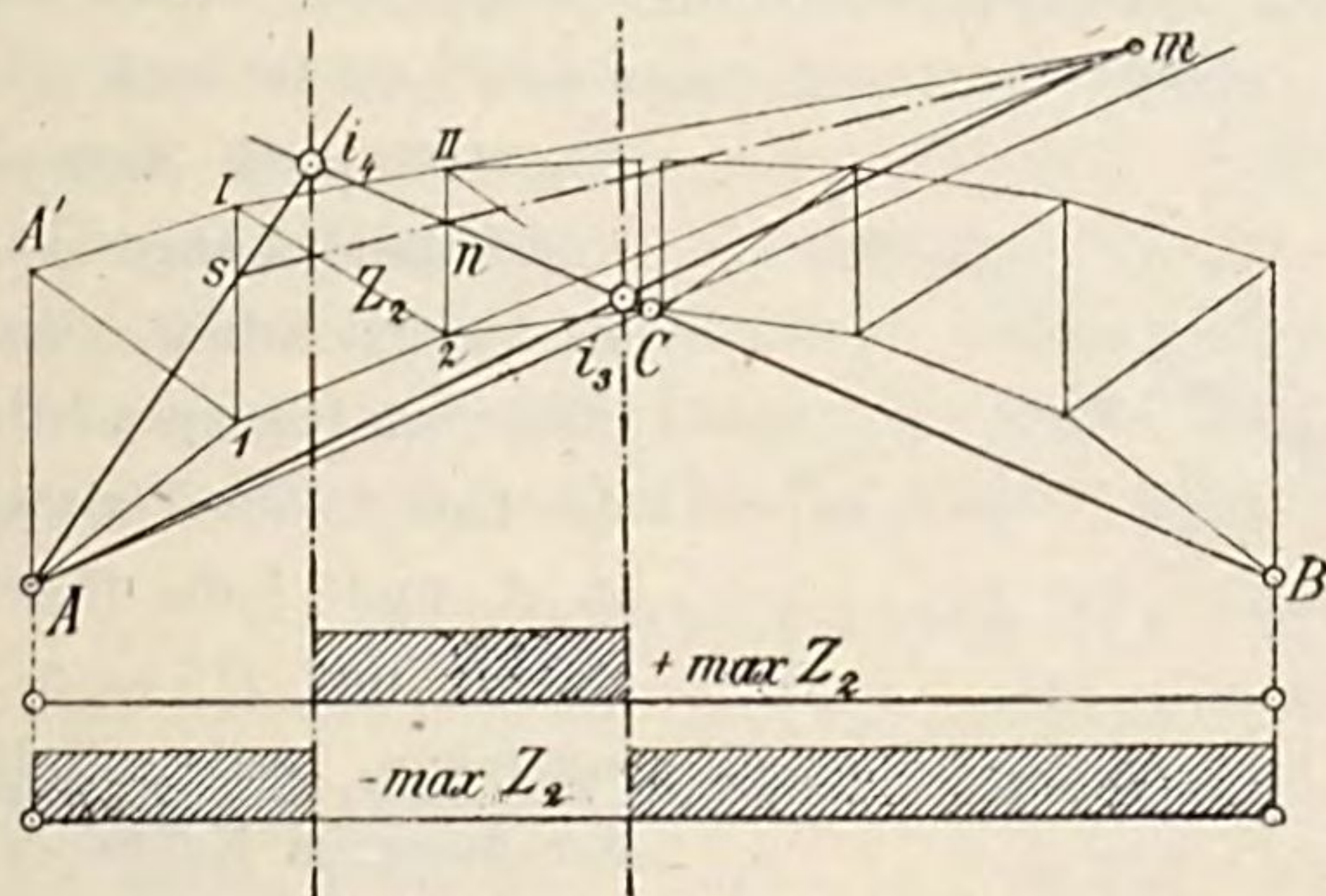


Fig. 107a.

Fig. 107b.

jede Last rechts von i_1 erzeugt Zug, jede Last links von i_1 Druck, was auf Grund der Momentenmethode ähnlich wie S. 78 bewiesen werden kann. Die grösste Zugbeanspruchung erleidet demnach der betrachtete Gurtstab bei Belastung des Trägertheils zwischen i_1 und B Fig. 105a, die grösste Druckbeanspruchung bei Belastung der Trägerstrecke i_1 A Fig. 105b.

Untere Gurtung.

Die Belastungsscheide eines Gurtstabes 1 2 Fig. 106 befindet sich hier im Schnitt i_2 von A I mit B C. Jede Einzellast bringt in 1 2 Druck oder Zug hervor, je nachdem sie rechts oder links von i_2 aufgebracht wird. Demnach entsprechen der grössten Zug- oder Druckbeanspruchung von 1 2 die in Fig. 106a und 106b angedeuteten Belastungen.

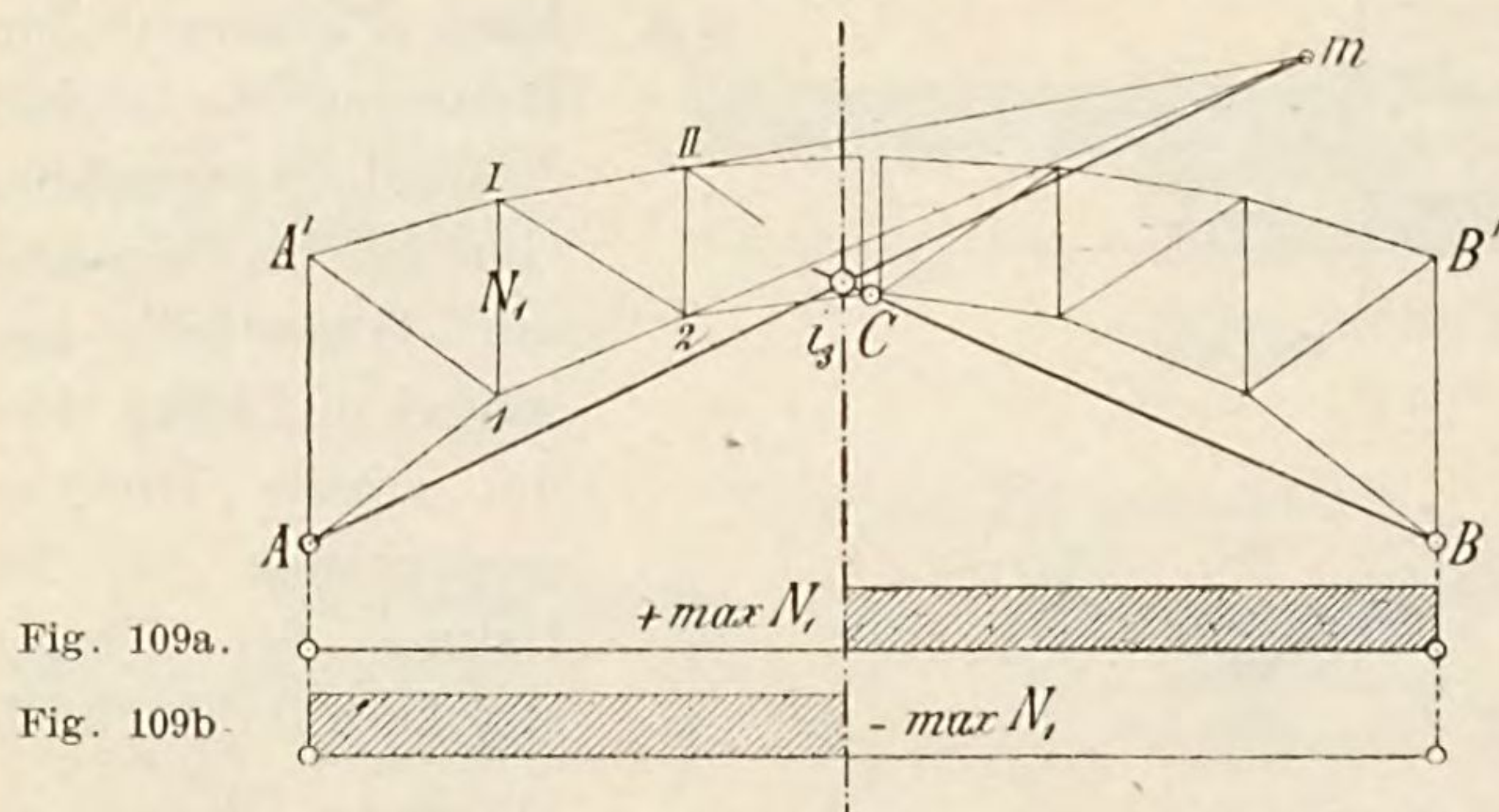
Diagonalen.

Es sei die ungünstigste Angriff-

nahme der Diagonale 1 2 (Fig. 107) zu bestimmen. Die beiden anderen, demselben Felde angehörigen Stäbe I II und 1 2 schneiden sich in m , welcher Punkt entweder über, auf oder unterhalb der Verbindungslinie A C gelegen sein kann. Wenn das Erstere der Fall ist, wie in Fig. 107 so beansprucht jede rechts vom Schnitt i_3 der Geraden A m und B C befindliche Einzellast die Diagonale auf Druck. Desgleichen bewirkt jede Last, welche sich zwischen A und der linksseitigen Begrenzung I 1 des betrachteten Feldes befindet, Druck, dagegen jede Last zwischen der rechtsseitigen Begrenzung II 2 des Feldes und i_3 Zug. Innerhalb des Feldes befindet sich eine weitere Belastungsscheide i_4 , welche man erhält, wenn man $m n$ bis zum

Schnitt s mit $I1$ verlängert und den Schnitt i_4 von As mit BC aufsucht.*) Jede innerhalb des Feldes links von i_4 aufgebrachte Last erzeugt Druck, jede Last rechts von i_4 Zug. Demnach ergibt eine Lastvertheilung wie in Fig. 107 a die grösste Zugbeanspruchung $+Z_{\max}$ der Diagonale $I2$, dagegen die Lastvertheilung Fig. 107 b deren maximale Druckkraft.

Fig. 109.



Verticalstäbe.

Die ungünstigsten Belastungen für einen Verticalstab $I1$ Fig. 109 sind aus den Figuren 109 a und 109 b zu ersehen. Der Nachweis hiefür, sowie die Bestimmung der ungünstigsten Belastungen bezüglich der übrigen

Verticalstäbe ergibt sich leicht analog dem Vorstehenden.

*) Beweis. Man denke sich eine beliebige Einzellast $P = \alpha \beta$ in der Verticalen v_1 innerhalb des betrachteten Feldes auf den Träger wirkend Fig. 108, so erzeugt sie in A eine auf bekannte Weise zu bestimmende Widerlagerreaction W^1 sowie in I einen verticalen Knotendruck D' , der mittels einfacher Hilfsconstruction als Länge $a_1 \beta_1$ erhalten wird. Die Resultirende der äusseren Kräfte, welche bei dieser Belastung für alle Querschnitte des Feldes entsteht, setzt sich zusammen aus W' und D' und ist in

Fig. 108.

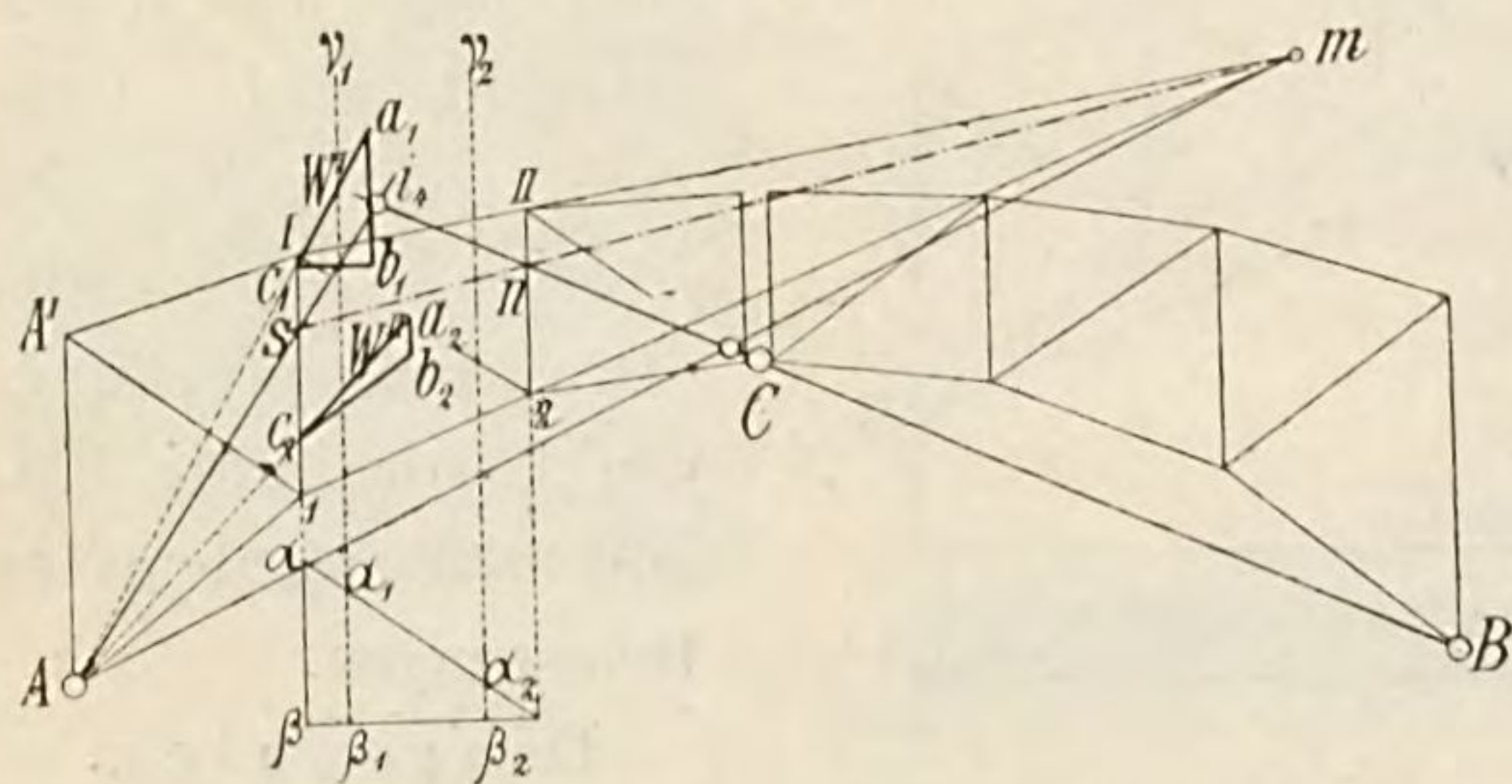
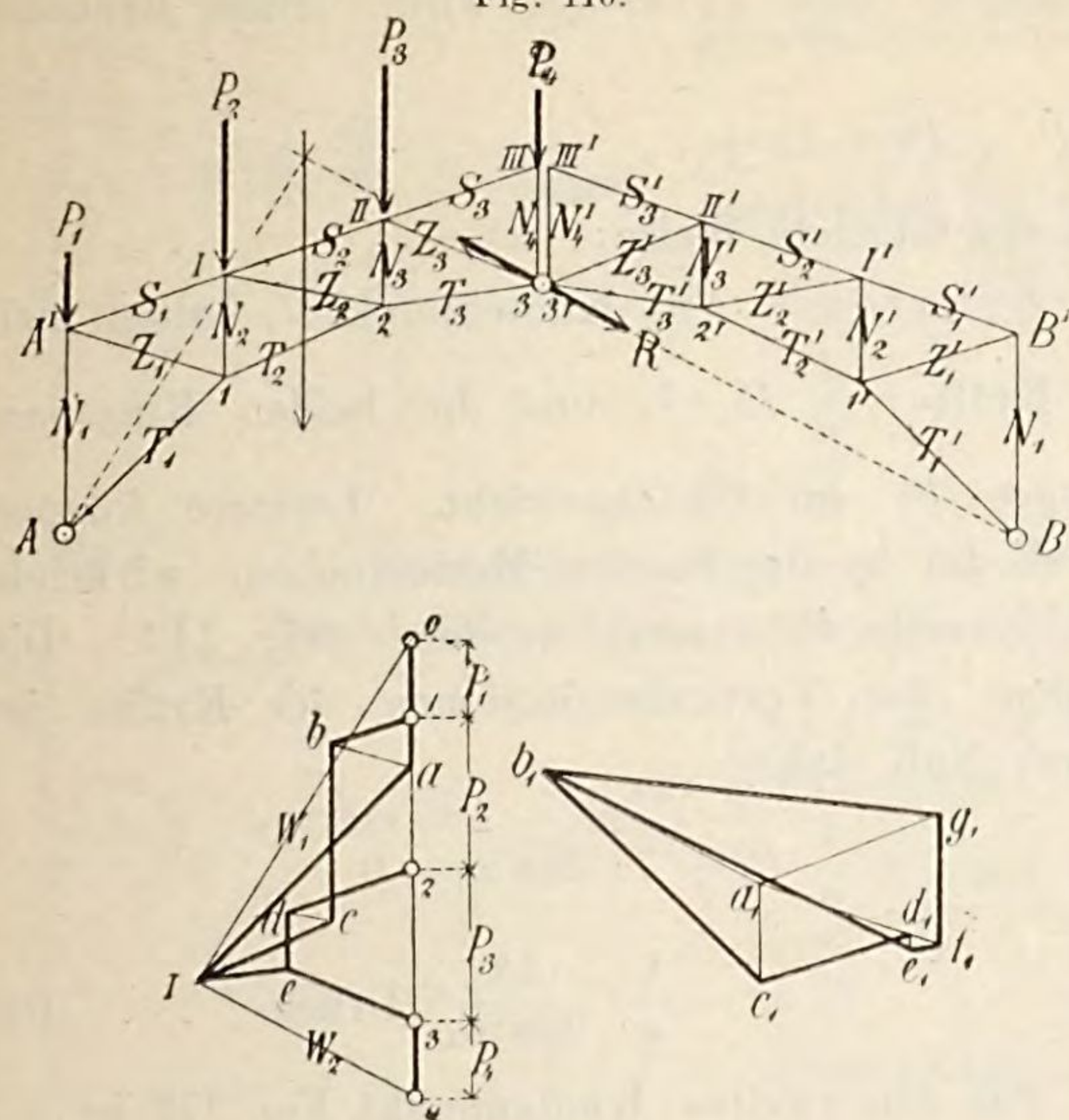


Fig. 108 nach Grösse Richtung und Lage als Länge $c_1 b_1$ bestimmt. Es ist ersichtlich, dass $I2$ hiebei auf Druck beansprucht wird. Rückt die Last in die Verticale v_2 , wobei in A und I die Reactionen $W'' = c_2 a_2$ und $D'' = a_2 \beta_2 = a_2 b_2$ entstehen, so ist die Resultirende der äusseren Kräfte $c_2 b_2$, welche den Stab $I2$ auf Zug beansprucht.

Diese und alle anderen Resultirenden, welche Laststellungen zwischen I und II entsprechen, schneiden sich im Durchschnittspunkt n von BC und $II2$, was sofort klar ist, wenn man bedenkt, dass die Resultirenden des linken Trägerfragments zusammenfallen mit den Resultirenden des rechten Trägerfragments, Letztere aber, sich zusammensetzend aus der rechtsseitigen Widerlagerreaction und dem jeweiligen Knotendruck in II , durch den Schnittpunkt n beider Kraftlinien gehen müssen.

Derjenigen Grenz-Laststellung nun, welche die Spannung Null im Stab hervorbringt, entspricht offenbar eine durch den Punkt m gehende Resultirende. Folglich hat man nur mn bis zum Schnitt s mit $I1$, zu verlängern, um im Schnitt i_4 der Geraden As und BC die fragliche Belastungsscheide zu erhalten.

Fig. 110.



Hiemit sind die erforderlichen Anhaltspunkte gegeben, um für alle Stäbe die den Grenz-Beanspruchungen zugehörigen Belastungen zu finden. Hat man diese bestimmt, so hat die Ermittlung der Stabkräfte keine Schwierigkeiten. Fig. 110 zeigt die graphische Bestimmung der Stabkräfte für den Fall, dass die Last nur eine Trägerhälfte bedeckt.

§ 10.

Das Kuppeldach.*)

Die kuppelförmige Dachfläche entsteht durch Rotation einer ebenen Curve um die verticale Mittelaxe des zu überdeckenden Raumes. Die Constructionstheile des Daches werden in die Kuppelfläche selbst verlegt, indem man eine Anzahl Sparren nach den Meridianen der Fläche anordnet und dieselben in verschiedenen Abständen durch horizontale Ringe mit einander verbindet. Auf solche Weise entsteht das eigentliche Constructionsgerippe als ein der Kuppel eingeschriebenes Polyeder. In die durch Sparren und Horizontalringe gebildeten Trapeze werden zur Aufnahme einseitiger Belastungen gekreuzte Diagonalen eingeschaltet. Zuweilen ist der oberste Ring durch einen besonderen Aufbau „Laterne“ belastet.

Beanspruchung durch Eigengewicht.

Jeder Ring hat das Gewicht einer ihm entsprechenden Kuppelzone aufzunehmen und überträgt dasselbe auf die Sparren. Diese Zonengewichte seien von oben angefangen der Reihe nach $P_1, P_2, P_3 \dots$, wobei, wenn die Kuppel durch eine Laterne abgeschlossen, das Gewicht derselben in dem Werthe von P_1 mit inbegriffen ist. Sind n Sparren vorhanden und ist der Grundriss der Kuppel ein reguläres n -Eck, so entfallen auf die Knotenpunkte eines Sparrens der Reihe nach die Lasten $\frac{1}{n} P_1, \frac{1}{n} P_2, \frac{1}{n} P_3 \dots$, (Fig. 111 und 111a) und ist diese Belastung für sämtliche Sparren die gleiche.

Die unteren Enden der Sparren stützen sich gegen einen Horizontalring, den sog. Mauerring, welcher den Horizontalschub der Kuppel aufnimmt, so dass eine

*) Schwedler, die Construction der Kuppeldächer, Zeitsch. f. Bauwesen 1866.

Reaction der Unterlage nur im verticalen Sinne entwickelt wird. Diese Reaction ist für jeden Sparren:

$$D = \frac{1}{n} (P_1 + P_2 + P_3 + \dots)$$

Die Stabkräfte bestimmen sich auf folgende Weise:

Fig. 111.

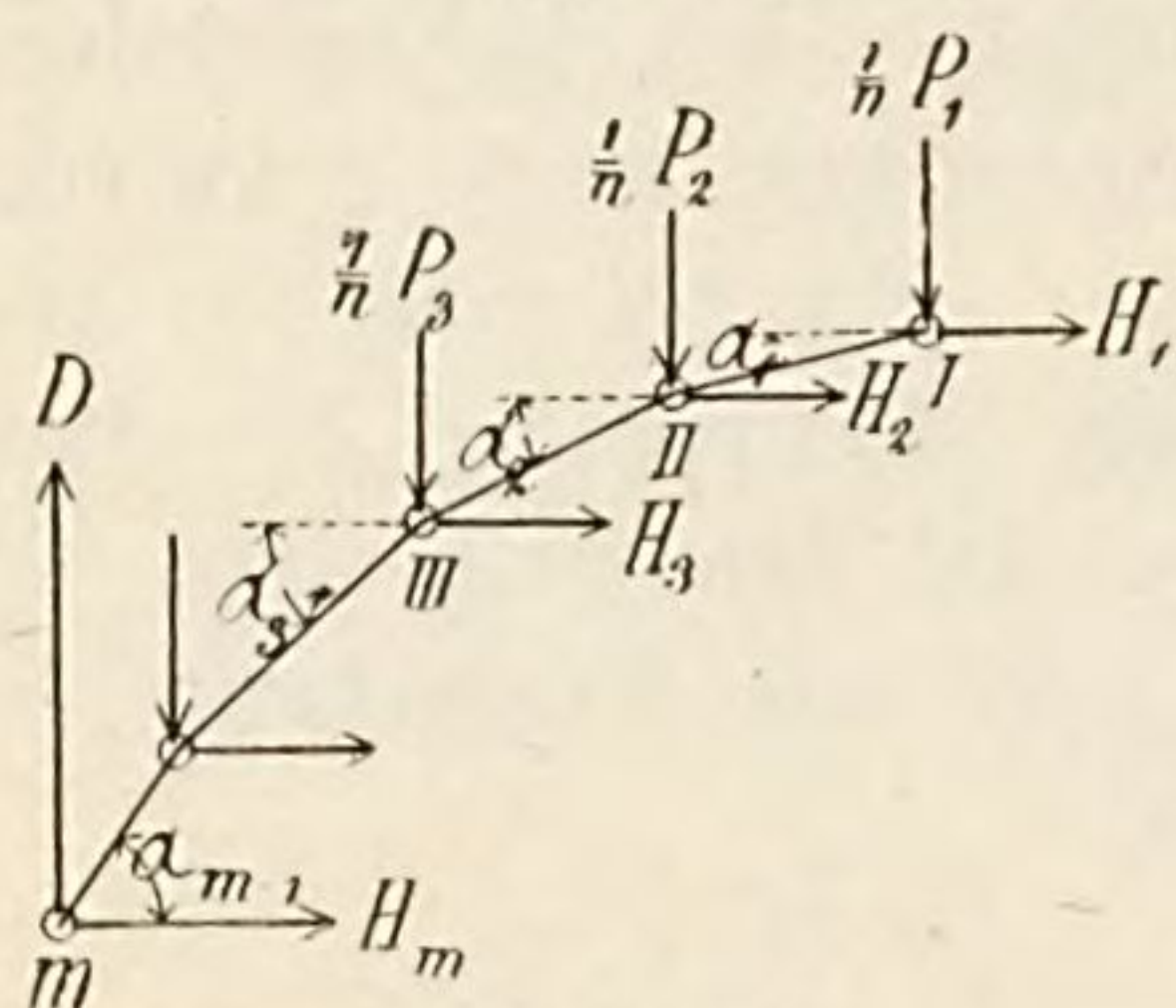


Fig. 111a.

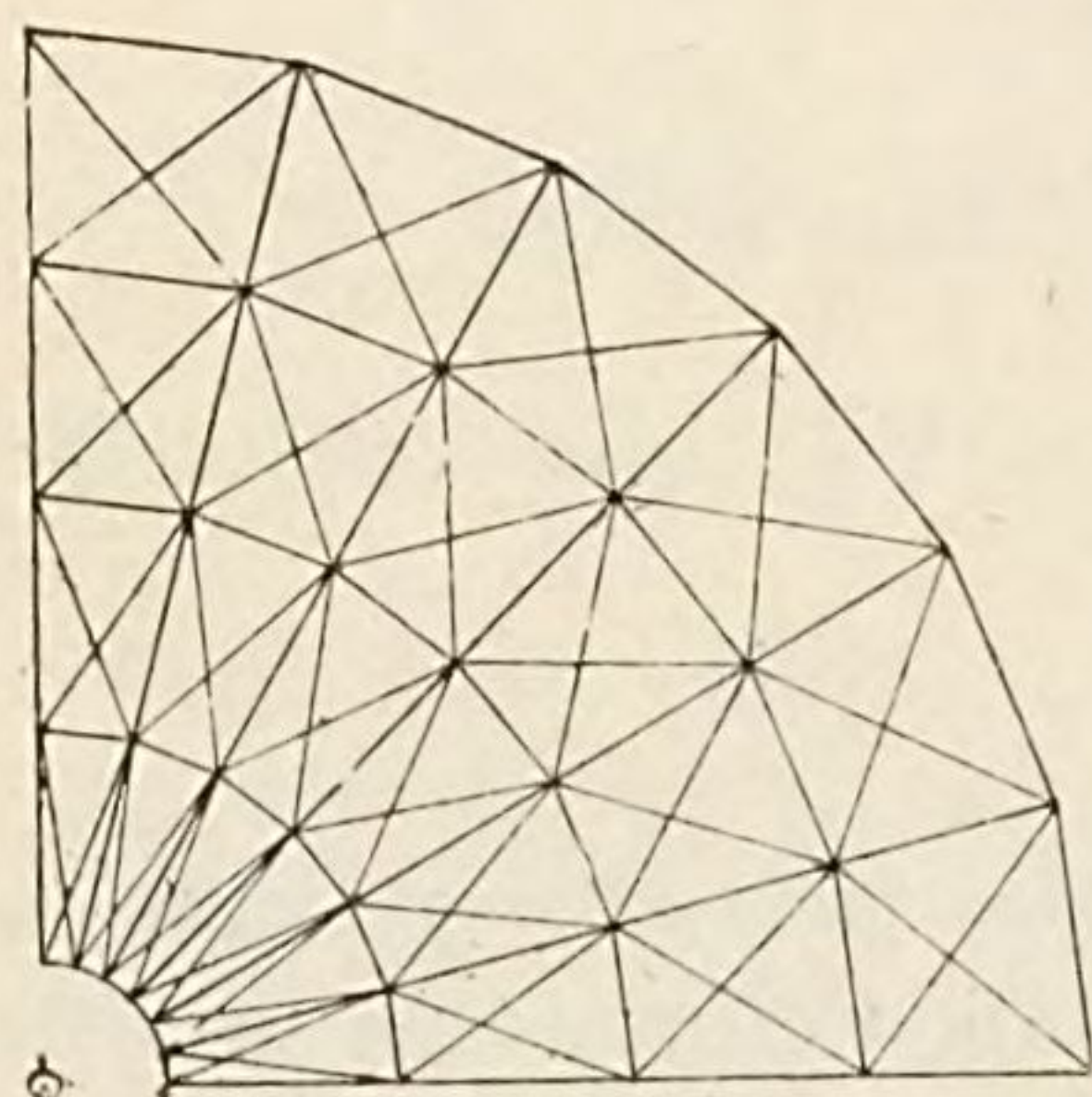


Fig. 112.

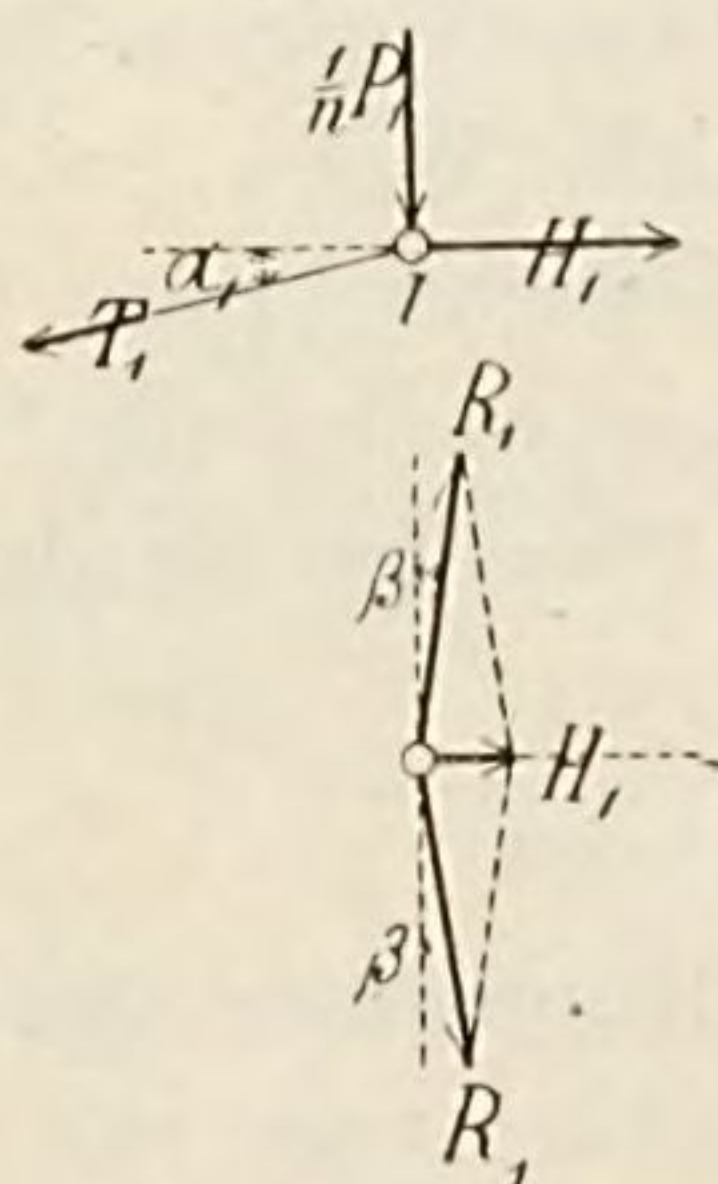
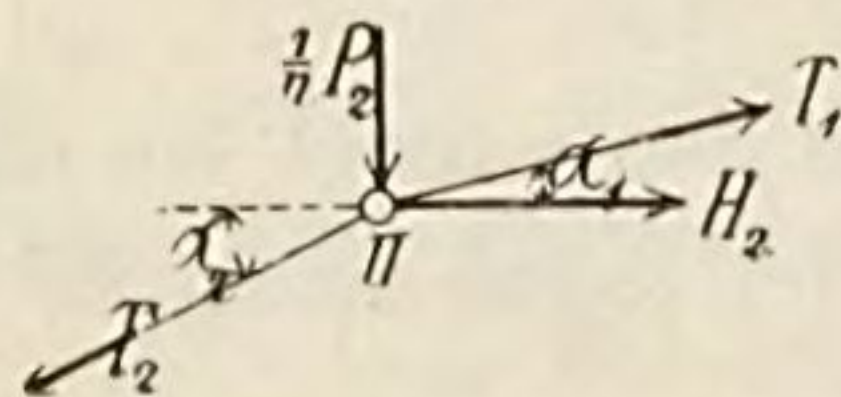


Fig. 113.



Sparren. Am Knotenpunkt *I* halten sich die Kräfte: $\frac{1}{n} P_1$, T_1 und die beiden Ringspannungen R_1 im Gleichgewicht. Letztere können durch die in der Sparren-Meridianebene wirkende Resultirende H_1 ersetzt werden. (Fig. 112). Die Summe der Verticalprojectionen der Kräfte ist gleich Null, daher:

$$\frac{1}{n} P_1 + T_1 \sin \alpha_1 = 0$$

$$\text{oder} \quad T_1 = -\frac{1}{n} \frac{P_1}{\sin \alpha_1} \text{ (Druck)} \quad . \quad . \quad (135)$$

Für den zweiten Knotenpunkt Fig. 113 ist:

$$\frac{1}{n} P_2 - T_1 \sin \alpha_1 + T_2 \sin \alpha_2 = 0$$

$$\text{oder} \quad T_2 = -\frac{1}{n \sin \alpha_2} (P_1 + P_2) \text{ (Druck)}, \quad (136)$$

desgleichen für den Knotenpunkt *III*

$$T_3 = -\frac{1}{n \sin \alpha_3} (P_1 + P_2 + P_3) \text{ (Druck)}, \quad (137)$$

u. s. f.*)

Horizontalringe. Zum Gleichgewicht der am Knotenpunkt *I* wirkenden Kräfte (Fig. 112) ist auch erforderlich, dass die Horizontalprojectionen derselben gleich Null sind. Daher hat man:

$$H_1 - T_1 \cos \alpha_1 = 0,$$

$$\text{oder, da } H_1 = 2 R_1 \sin \beta$$

$$\text{und wie aus Fig. 114 ersichtlich } \beta = \frac{360}{2n} = \frac{\pi}{n}$$

$$R_1 = + \frac{P_1 \cotg \alpha_1}{2n \sin \frac{\pi}{n}} \text{ (Druck)} \quad . \quad (138)$$

ebenso ist für Knotenpunkt *II* (Fig. 113)

$$H_2 + T_1 \cos \alpha_1 - T_2 \cos \alpha_2 = 0$$

*) Soll der Sparrendruck überall constant ($= T$) sein, so bestimmen sich hienach die Neigungswinkel:

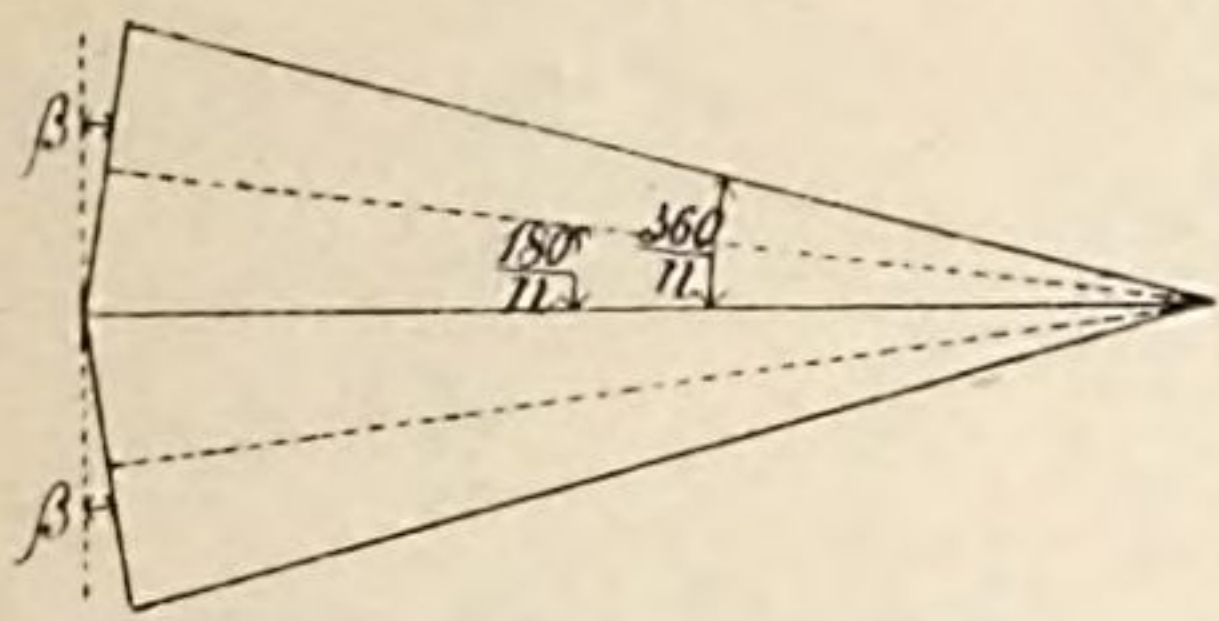
$$\sin \alpha_1 = \frac{P_1}{n T}$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{P_1 + P_2}{n T}$$

$$\sin \alpha_3 = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{n T}$$

u. s. f.

Fig. 114.



$$\text{oder } R_2 = - \frac{(P_1 + P_2) \operatorname{Cotg} \alpha_2 - P_1 \operatorname{Cotg} \alpha_1}{2 n \operatorname{Sin} \frac{\pi}{n}} \quad (139)$$

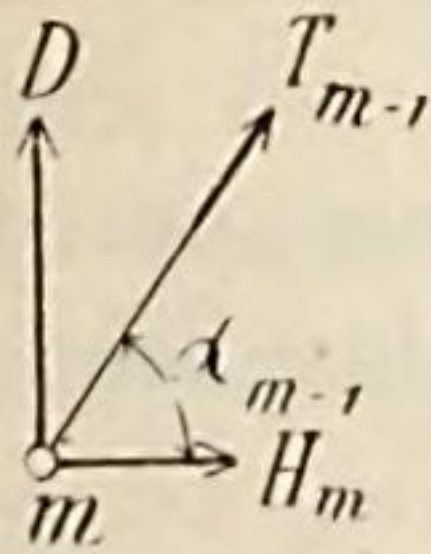
desgleichen für den Knotenpunkt *III*

$$R_3 = - \frac{(P_1 + P_2 + P_3) \operatorname{Cotg} \alpha_3 - (P_1 + P_2) \operatorname{Cotg} \alpha_2}{2 n \operatorname{Sin} \frac{\pi}{n}} \quad (140)$$

u. s. f.

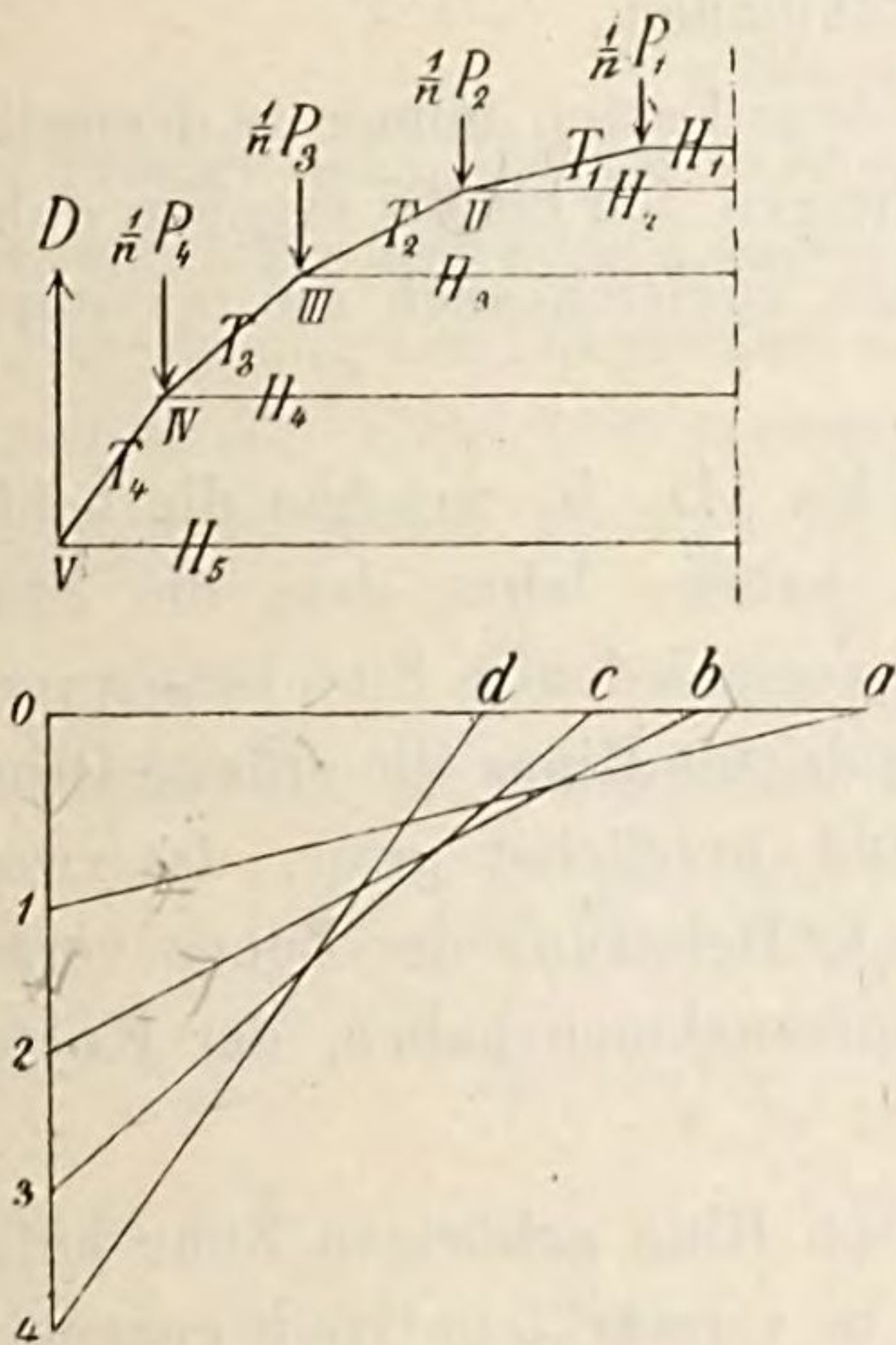
Fig. 115.

Bezüglich des untersten Knotenpunktes *m* Fig. 115 am Mauerring besteht die Gleichgewichtsgleichung:



$$H_m + T_{m-1} \operatorname{Cos} \alpha_{m-1} = 0, \\ \text{daher } R_m = + \frac{(P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_{m-1}) \operatorname{Cotg} \alpha_{m-1}}{2 n \operatorname{Sin} \frac{\pi}{n}} \text{ (Zug)} \quad (141)$$

Fig. 116.



Graphische Lösung. Man trägt $\frac{P_1}{n} = 0 \ 1$,

$\frac{P_2}{n} = 1 \ 2 \dots \frac{P_4}{n} = 3 \ 4$ Fig. 116 auf und bildet der Reihe nach die Kräftepolygone für die Knotenpunkte *I, II, \dots, V*:

Knotenpunkt *I*.

Bekannt: $\frac{P_1}{n} = 0 \ 1$,

unbekannt: T_1, H_1 .

Polygon: 0 1 a 0,

daher: $T_1 = 1 \ a$ (Druck),

$H_1 = a \ 0$.

Knotenpunkt *II*.

Bekannt: $\frac{P_2}{n} = 1 \ 2, T_1 = a \ 1$,

unbekannt: T_2, H_2 .

Polygon: a 1 2 b a,

daher: $T_2 = 2 \ b$ (Druck),

$H_2 = b \ a$.

Knotenpunkt *III*.

Bekannt: $\frac{P_3}{n} = 2 \ 3, T_2 = b \ 2$,

unbekannt: T_3, H_3 .

Polygon: b 2 3 c b,

daher: $T_3 = 3 \ c$ (Druck)

$H_3 = c \ b$.

Knotenpunkt *IV*.

Bekannt: $\frac{P_4}{n} = 3 \ 4, T_3 = c \ 3$,

unbekannt: T_4, H_4 .

Polygon: c 3 4 d c,

daher: $T_4 = 4 \ d$ (Druck)

$H_4 = d \ c$.

Knotenpunkt V.

Bekannt: $D = 40$, $T_4 = d4$.unbekannt: H_5 .Polygon: $40d4$,daher: $H_5 = 0d$.

Nachdem $H_1, H_2 \dots H_4$ bekannt, ergeben sich nach Fig. 112 leicht die Stabkräfte in den Ringen. Es zeigt sich, dass im Laternenring Druck, in den übrigen Ringen Zug herrscht.

Beanspruchung durch Schnee- und Winddruck.

Die Kuppelconstructionen sind in der Regel so flach, dass es genügt, nur die verticale Componente des Winddrucks (Th. II. S. 89) einzuführen, daher Schnee- und Windbelastung gemeinschaftlich behandelt werden können.

Bei totaler Belastung sind die für Eigengewicht entwickelten Formeln unmittelbar anwendbar und desshalb hier nur diejenigen partiellen Belastungen festzustellen, welche die ungünstigste Angriffnahme der einzelnen Constructionstheile zur Folge haben. Unter $Q_1, Q_2 \dots$ sollen die Schnee- und Windbelastungen verstanden werden, welche dem ersten, zweiten u. s. f. Ring zukommen.

Sparren. Die Sparren werden durch vorhandene Lasten immer in demselben Sinn, nämlich auf Druck, beansprucht. Die Gleichungen 135 bis 137 ergeben daher, wenn man die entsprechenden Lastenwerthe einführt, zugleich auch die maximalen Stabkräfte der mobilen Belastung.

Ringe. Ein Blick auf die Gleichungen 139 bis 141, in welchen die beiden Summanden der Zähler verschiedene Vorzeichen haben, lehrt, dass die Stäbe in den Ringen je nach der Vertheilung der Last in verschiedenem Sinn beansprucht werden können. So findet z. B. in den Stäben des dritten Rings die grösste Druckspannung statt, wenn in Gl. 140 der erste Summand möglichst gross, der zweite möglichst klein ist. Dies ist der Fall, wenn, totale Belastung der Zonen vorausgesetzt, die Knotenpunkte *I* und *II* keine Last aufzunehmen haben, der Knotenpunkt *III* aber belastet ist.

Dagegen bewirkt jede oberhalb der zum dritten Ring gehörigen Zone aufgebrachte Last ein Wachsen des zweiten Summanden in verstärktem Grade gegenüber dem ersten, da $\text{Cotg } \alpha_2$ immer grösser als $\text{Cotg } \alpha_3$. Somit erhält man das Zugmaximum für R_3 , wenn die Zone *III* nicht, dagegen der innerhalb befindliche Kuppeltheil voll belastet ist. Unter Berücksichtigung dessen ergeben sich nachstehende Maximalwerthe der Stabkräfte in den Ringen:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{grösster Druck} & \text{grösster Zug} \\ \text{Laternenring: } \max R_1 = - \frac{Q_1 \text{ Cotg } \alpha_1}{2n \text{ Sin } \frac{\pi}{n}} & R_1 = 0 \\ \text{Ring II: } \max R_2 = - \frac{Q_2 \text{ Cotg } \alpha_2}{2n \text{ Sin } \frac{\pi}{n}} & \max R_2 = \frac{Q_1 (\text{Cotg } \alpha_1 - \text{Cotg } \alpha_2)}{2n \text{ Sin } \frac{\pi}{n}} \end{array} \right\} (142)$$

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{Ring III: } \max R_s = - \frac{\text{grösster Druck}}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \frac{Q_3 \cotg \alpha_3}{\phantom{2 n \sin \frac{\pi}{n}}} \quad \max R_3 = \frac{\text{grösster Zug}}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \frac{(Q_1 + Q_2) \cotg (\alpha_2 - \alpha_3)}{\phantom{2 n \sin \frac{\pi}{n}}} \\
 &\text{u. s. f.} \\
 &\text{Mauerring: } \max R_m = 0 \quad \max R_m = \frac{(Q_1 + Q_2 + \dots) \cotg \alpha_m - 1}{2 n \sin \frac{\pi}{n}}
 \end{aligned} \right\} (142)$$

Diagonalen. Denkt man sich durch die Mitte der sich kreuzenden Diagonalen eine Meridianebene gelegt, welche die Kuppel in zwei Hälften trennt, und die eine Hälfte nur durch Eigengewicht, die andere aber durch Eigengewicht und mobile Last beansprucht, so wird durch die hiebei stattfindende grösste Differenz der Sparrendrücke die Maximal-Zugkraft in den Diagonalen eintreten. Einer Belastung nun der ganzen Kuppel nur durch Eigengewicht entspricht der Sparrendruck im obersten Ring $\frac{P_1}{n \sin \alpha_1}$, während der Sparrendruck bei durch Eigengewicht und mobile

Last total belasteter Kuppel $\frac{P_1 + Q_1}{n \sin \alpha_1}$ ist. Deren Differenz:

$$\frac{P_1 + Q_1}{n \sin \alpha_1} - \frac{P_1}{n \sin \alpha_1} = \frac{Q_1}{n \sin \alpha_1}$$

wird grösser sein als der vorerwähnte wirklich vorkommende Unterschied in den Sparrendrücken und wenn man, um complicirtere Rechnungen zu vermeiden, die Differenz der Berechnung der Diagonalen zu Grunde legt, so wird noch ein gewisser Grad von überschüssiger Sicherheit vorhanden sein. Ist somit der Winkel zwischen Diagonale und mehrbelastetem Sparren γ_1 , so ist die Diagonalkraft approx.

$$\left. \begin{aligned}
 &Z_1 = \frac{Q_1}{n \sin \alpha_1 \cos \gamma_1} \\
 &\text{und ebenso für die Diagonalen der übrigen Zonen:} \\
 &Z_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{n \sin \alpha_2 \cos \gamma_2} \\
 &Z_3 = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{n \sin \alpha_3 \cos \gamma_3} \\
 &\text{u. s. f.}
 \end{aligned} \right\} (143)$$

§ 11.

Das Zeltdäch.

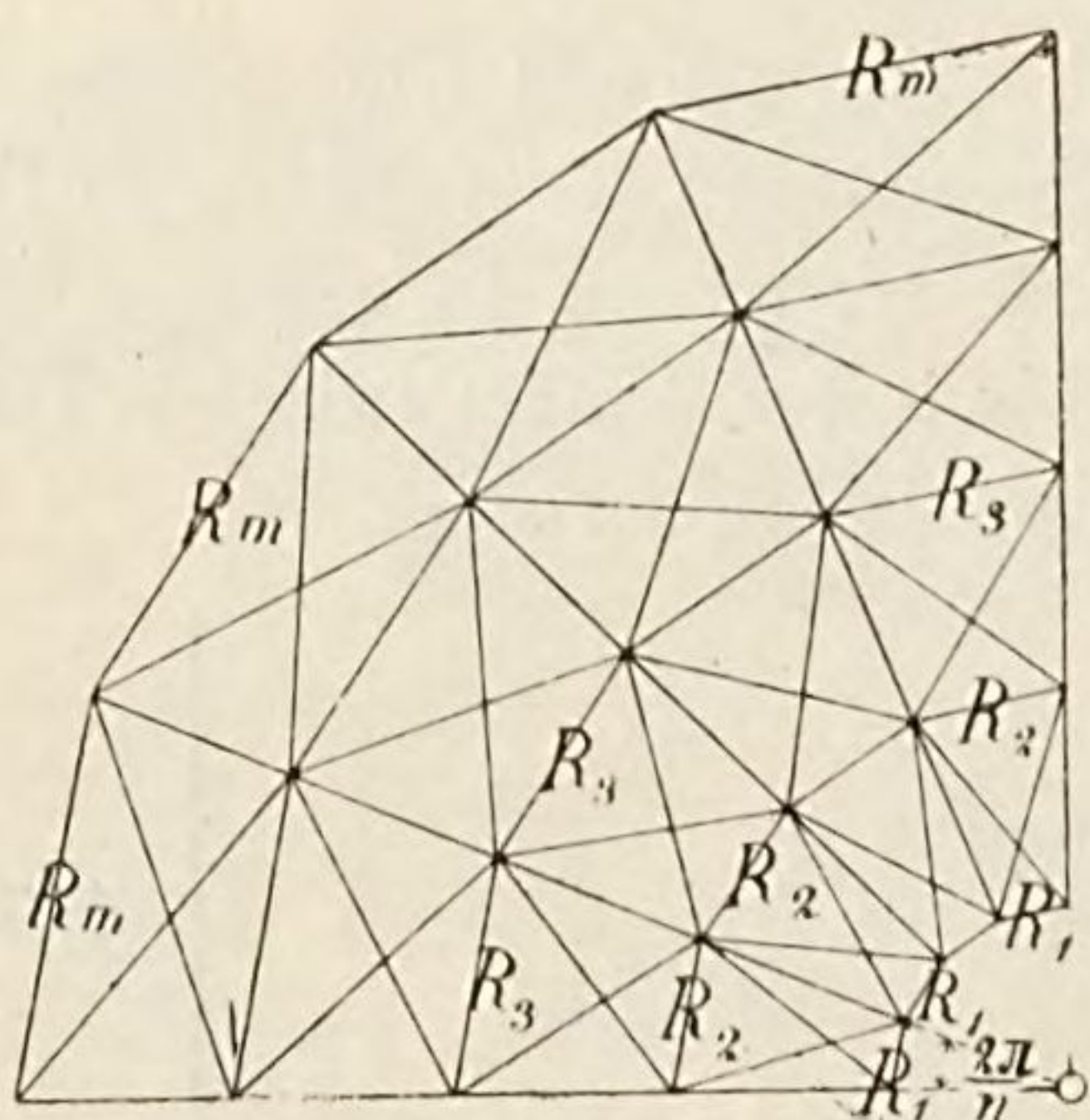
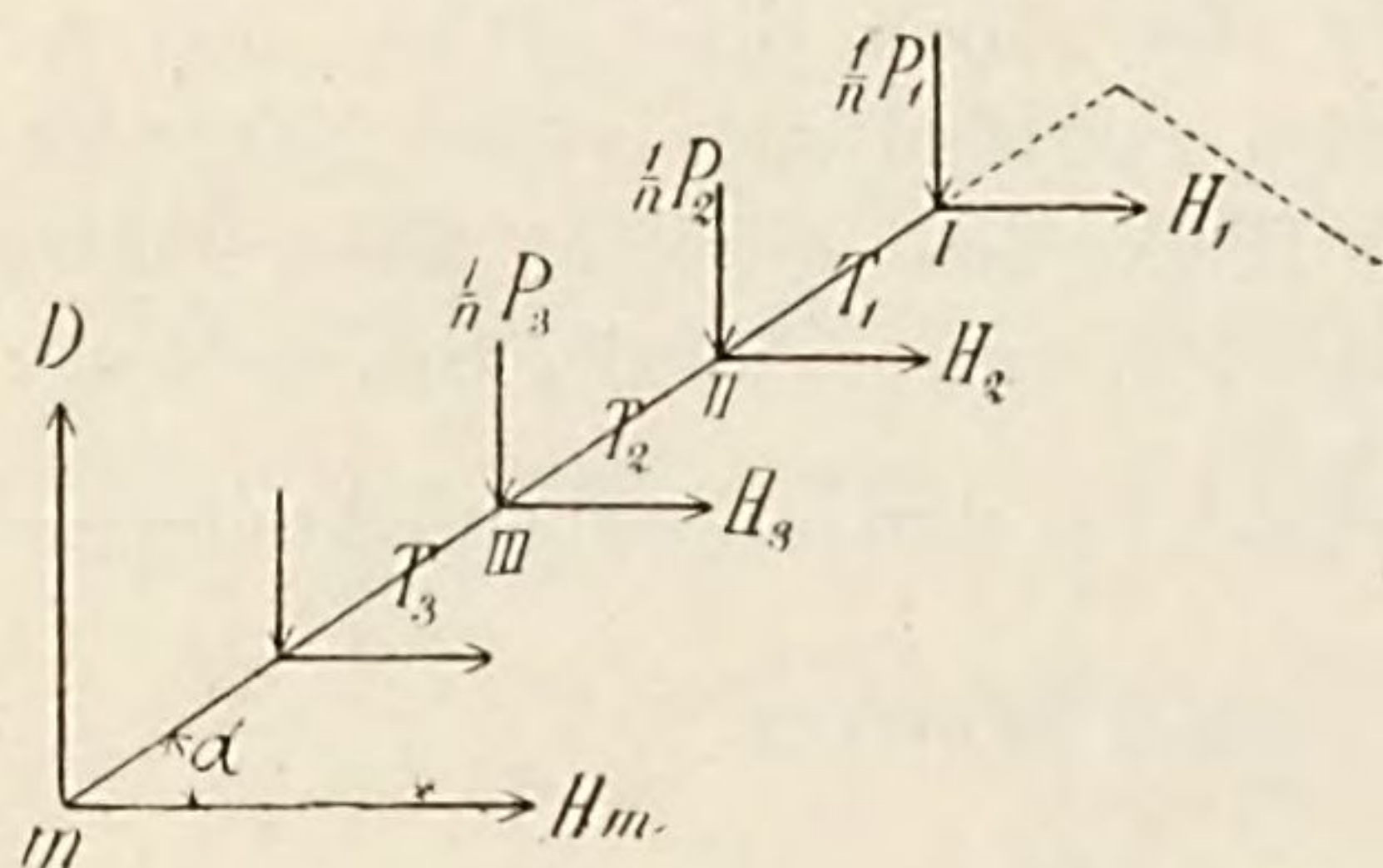
Dächer mit pyramidenförmiger Oberfläche werden Zeltdächer genannt. Man construirt sie entweder, indem man eine Anzahl radial gestellter selbständiger Binder anordnet, welche die Dachfläche tragen, oder in der Weise, dass wie bei den Kuppeln eine gegenseitige Verspannung der Sparren durch polygonale Horizontalringe eintritt, wobei der Innenraum frei bleibt und sämtliche Constructionstheile in die Dachfläche zu liegen kommen. Im ersteren Falle sind die Binder unter Einfluss der auf sie treffenden Belastung wie bei den Balkendächern zu berechnen; bei letzter Anordnung schliesst sich der Gang der Untersuchung dem der Kuppeldächer an.

Bei flachen Zeltdächern kommt als mobile Last ausser dem Schneedruck nur die verticale Componente des Winddrucks in Betracht und kann die seitliche Beanspruchung durch den Wind als unwesentlich vernachlässigt werden, dagegen spielt dieselbe eine bedeutende Rolle bei steilen Dächern, bei welchen hinwiederum von der Schneelast abgesehen werden kann.

Beanspruchung durch Eigengewicht.

Die den einzelnen Ringzonen entsprechenden Belastungen seien $P_1, P_2, P_3 \dots$. Dient zum Abschluss des Daches im First eine Laterne, so ist im Werth von P_1 das Gewicht derselben mit einzuschliessen. Bei n vorhandenen Sparren treffen auf die einzelnen Knotenpunkte derselben die Lasten $\frac{1}{n} P_1, \frac{1}{n} P_2, \frac{1}{n} P_3 \dots$

Fig. 117.



(Fig. 117). Der Sparrenschub am unteren Ende der Sparren wird durch den Auflagerring aufgenommen und besteht somit die Wirkung der Unterlage in einer Verticalreaction gleich der Summe der von den Sparren aufgenommenen Lasten.

Sparren. Aehnlich wie S. 106 lassen sich für die einzelnen Knotenpunkte die Gleichgewichtsbedingungen aufstellen:

$$\text{Knotenpunkt I} \dots \frac{1}{n} P_1 + T_1 \sin \alpha = 0$$

$$\text{Knotenpunkt II} \dots \frac{1}{n} P_2 - T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \alpha = 0.$$

$$\text{Knotenpunkt III} \dots \frac{1}{n} P_3 - T_2 \sin \alpha + T_3 \sin \alpha = 0$$

u. s. f.

Hieraus ergeben sich die Stabkräfte in den Sparren:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= -\frac{P_1}{n \sin \alpha} \text{ (Druck)} \\ T_2 &= -\frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha} \text{ (Druck)} \\ T_3 &= -\frac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha} \text{ (Druck)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (144)$$

Ringe. Aus den Gleichgewichtsbedingungen:

$$\text{Knotenpunkt I} \dots H_1 - T_1 \cos \alpha = 0$$

$$\text{Knotenpunkt II} \dots H_2 + T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \alpha = 0$$

$$\text{Knotenpunkt III} \dots H_3 + T_2 \cos \alpha - T_3 \cos \alpha = 0$$

u. s. f.

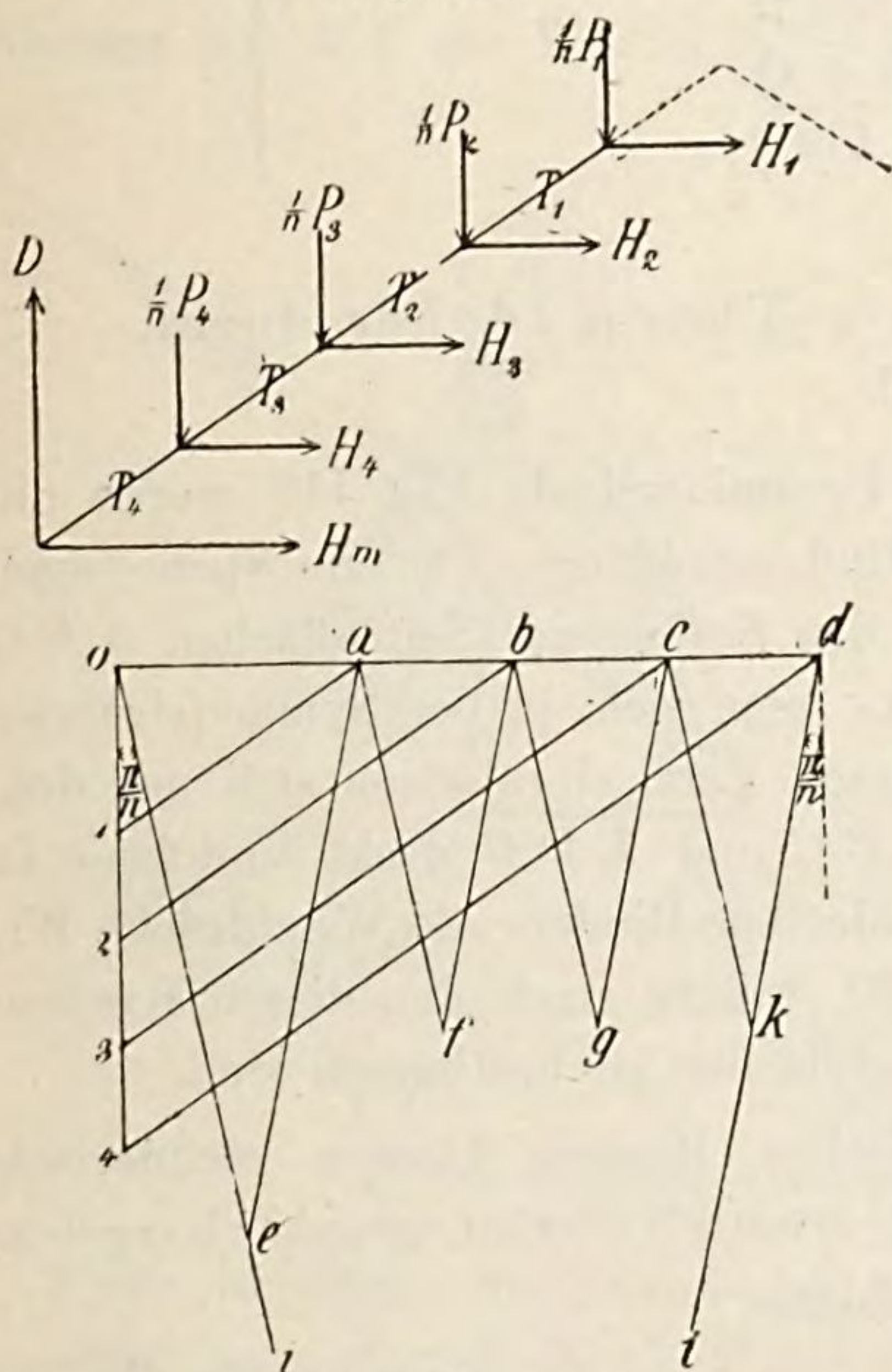
bestimmen sich die Stabkräfte in den Ringen:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= - \frac{P_1 \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad (\text{Druck}) \\ R_2 &= - \frac{P_2 \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad (\text{Druck}) \\ R_3 &= - \frac{P_3 \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad (\text{Druck}) \\ &\vdots \\ R_m &= - \frac{P_m \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad (\text{Druck}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (145)$$

u. s. f.

Bezüglich des Mauerrings (Knotenpunkt m) hat man:

Fig. 118.



$$H_m + T_{m-1} \cos \alpha = 0,$$

$$\text{daher } R_m = \frac{P_1 + P_2 + \dots + P_{m-1}}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \cotg \alpha$$

(Zug) (146)

Graphische Lösung: Man trage Fig. 118 $\frac{1}{n} P_1 = 0.1, \frac{1}{n} P_2 = 0.2 \dots \frac{1}{n} P_4 = 0.4$ auf, so dass $D = 4.0$, und bilde wie S. 107 für die Knotenpunkte I, II . . . die Kräftepolygone 0 1 a 0, a 1 2 b a u. s. f. So findet man:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 1 a \\ T_2 &= 2 b \\ T_3 &= 3 c \\ T_4 &= 4 d \end{aligned} \right\} \text{Druck} \quad \left. \begin{aligned} H_1 &= a 0 \\ H_2 &= b a \\ H_3 &= c b \\ H_4 &= d c \\ H_m &= 0 d. \end{aligned} \right\}$$

Aus den Werthen für die Radialkräfte ergeben sich nun leicht die Stabkräfte in den Ringen

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= e o = a e \\ R_2 &= f a = b f \\ R_3 &= g b = c g \\ R_4 &= h c = d h \\ R_m &= 0 i = i d \quad (\text{Zug}) \end{aligned} \right\} \text{Druck}$$

Beanspruchung durch Schnee und (verticalen) Winddruck.

Sparren. Zuzolge den Gleichungen 144 entstehen die grössten, durch mobile Belastung erzeugten Stabkräfte, welche immer als Druckkräfte auftreten, dann, wenn die mobile Belastung eine totale ist.

Ringe. Die Stabkräfte eines Rings erreichen gemäss den Gleichungen 145 ihre Maximalwerthe, wenn die Zone des betreffenden Rings ganz belastet ist. Dieselben sind sämtlich Druckkräfte mit Ausnahme des Mauerrings, dessen Stäbe auf Zug beansprucht werden. Der grösste Zug findet bei totaler Belastung des Daches statt.

Diagonalen. Die grösste Differenz in den Stabkräften zweier benachbarter Sparren des ersten Rings kann unter Beibehaltung der beim Kuppeldach gemachten Belastungsannahmen

zu $\frac{P_1 + Q_1}{n \sin \alpha} - \frac{P_1}{n \sin \alpha} = \frac{Q_1}{n \sin \alpha}$ festgesetzt werden.

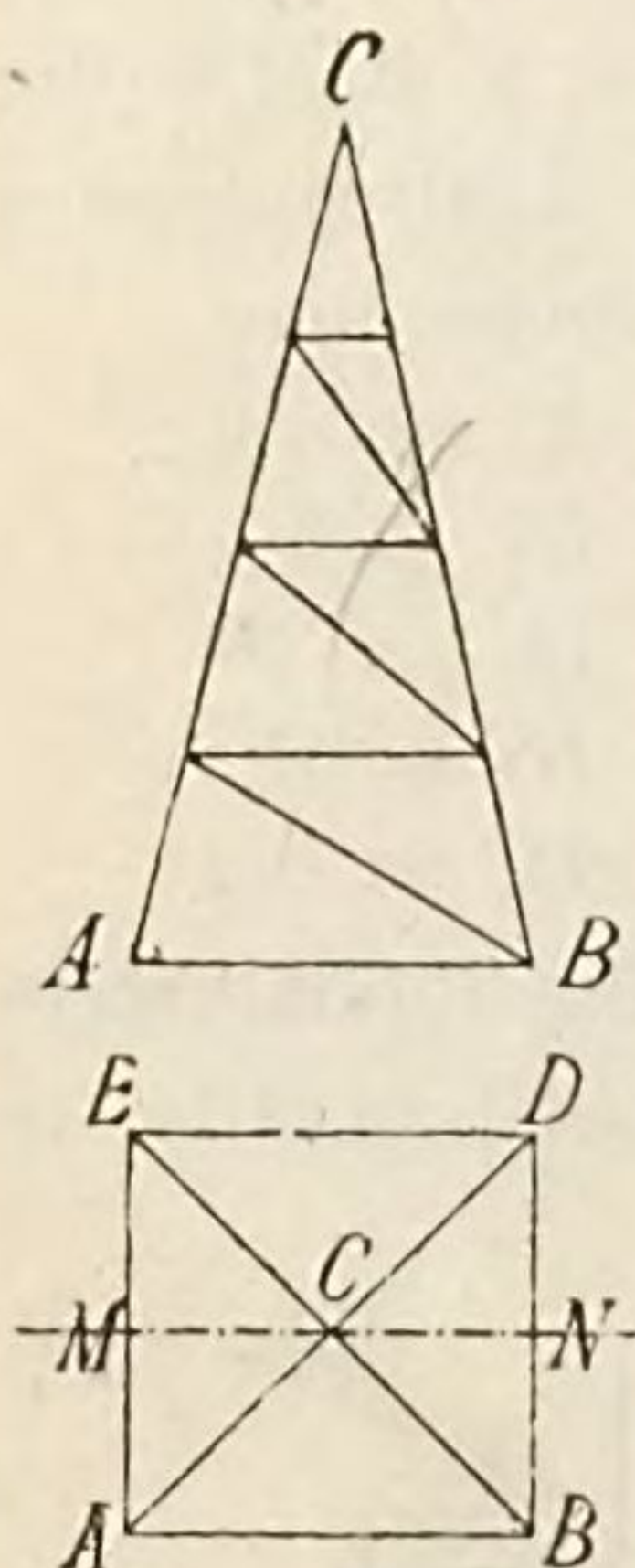
Ist γ_1 der Winkel der Diagonale mit dem Sparren, so ist die Zugbeanspruchung der Diagonale

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= \frac{Q_1}{n \sin \alpha \cos \gamma_1} \\ \text{und ebenso für die Diagonalen der übrigen Zonen:} \\ Z_2 &= \frac{Q_1 + Q_2}{n \sin \alpha \cos \gamma_2} \\ Z_3 &= \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{n \sin \alpha \cos \gamma_3} \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (147)$$

u. s. f.

Beanspruchung steiler Zeltdächer (Thurmdächer) durch den Wind.

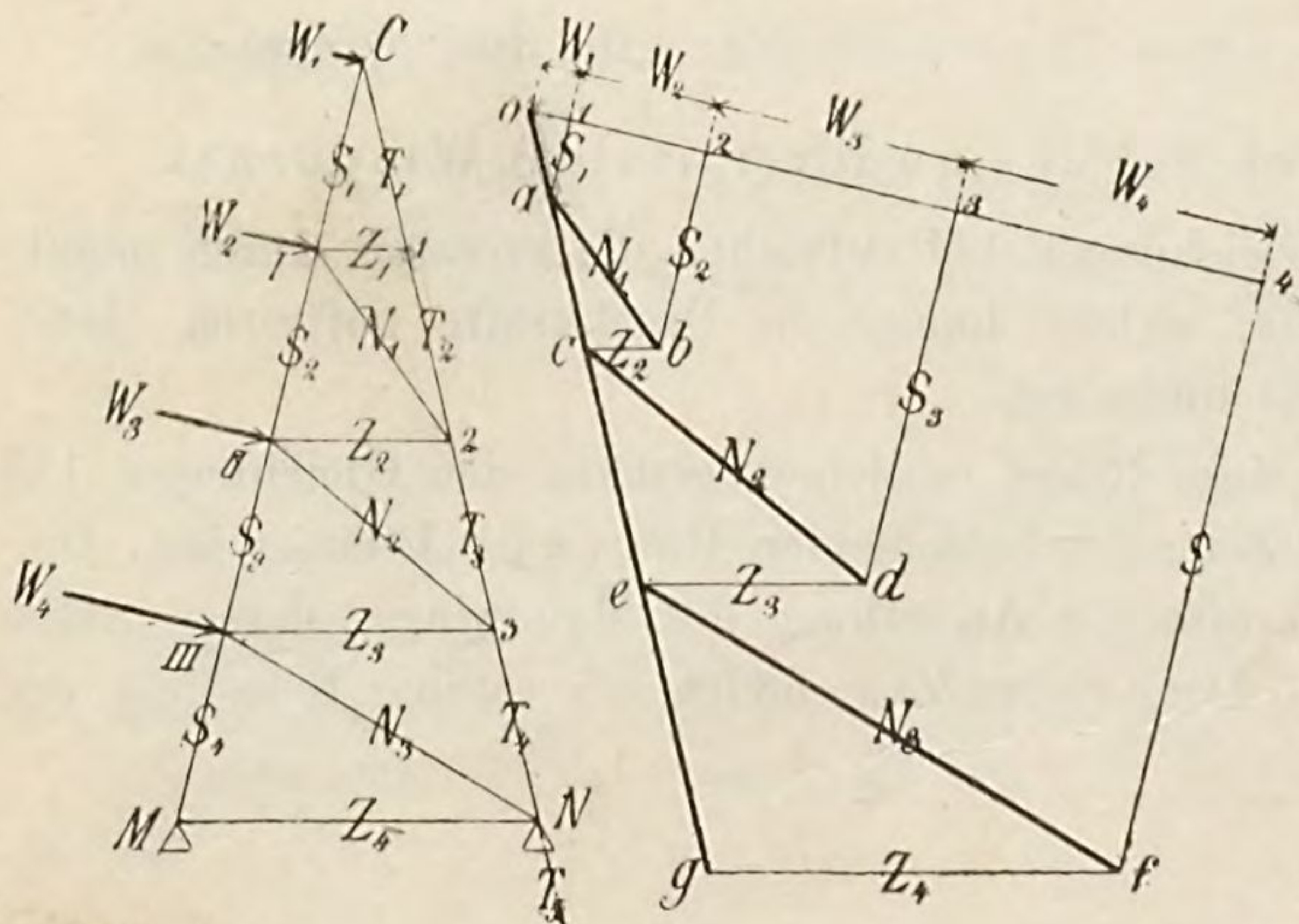
Fig. 119.



Von dem vierseitigen Pyramidendach Fig. 119 werde die Seitenfläche AEC vom Wind getroffen. Um die Spannungen zu finden, welche hiebei in den Stäben der Seitenflächen ABC und EDC entstehen, denke man sich in der Symmetrieebene MN einen Dachbinder, dessen Verticalprojection sich mit denjenigen der Dachflächen ABC und EDC deckt und lasse in den Knotenpunkten dieses ideellen Binders die Winddrücke W_1, W_2, W_3, W_4 wirken Fig. 120, welche nach den diesen Knotenpunkten entsprechenden Dachflächen zu bestimmen sind.

Die Stabkräfte des ideellen Binders können rechnerisch mittels der Momentenmethode ermittelt werden; graphisch ergeben sie sich nach Fig. 120 wie folgt:

Fig. 120.



Knotenpunkt C.

Bekannt: $W_1 = 0$ 1,

unbekannt: S_1, T_1 .

Polygon: 0 1 a 0,

daher: $S_1 = 1$ a (Zug)

$T_1 = a$ 0 (Druck).

Knotenpunkt 1.

Bekannt: $T_1 = 0$ a,

unbekannt: T_2, Z_1 .

Polygon: 0 a 0,

daher: $T_2 = a$ 0 = T_1

(Druck)

$Z_1 = 0$.

V. Abschnitt.

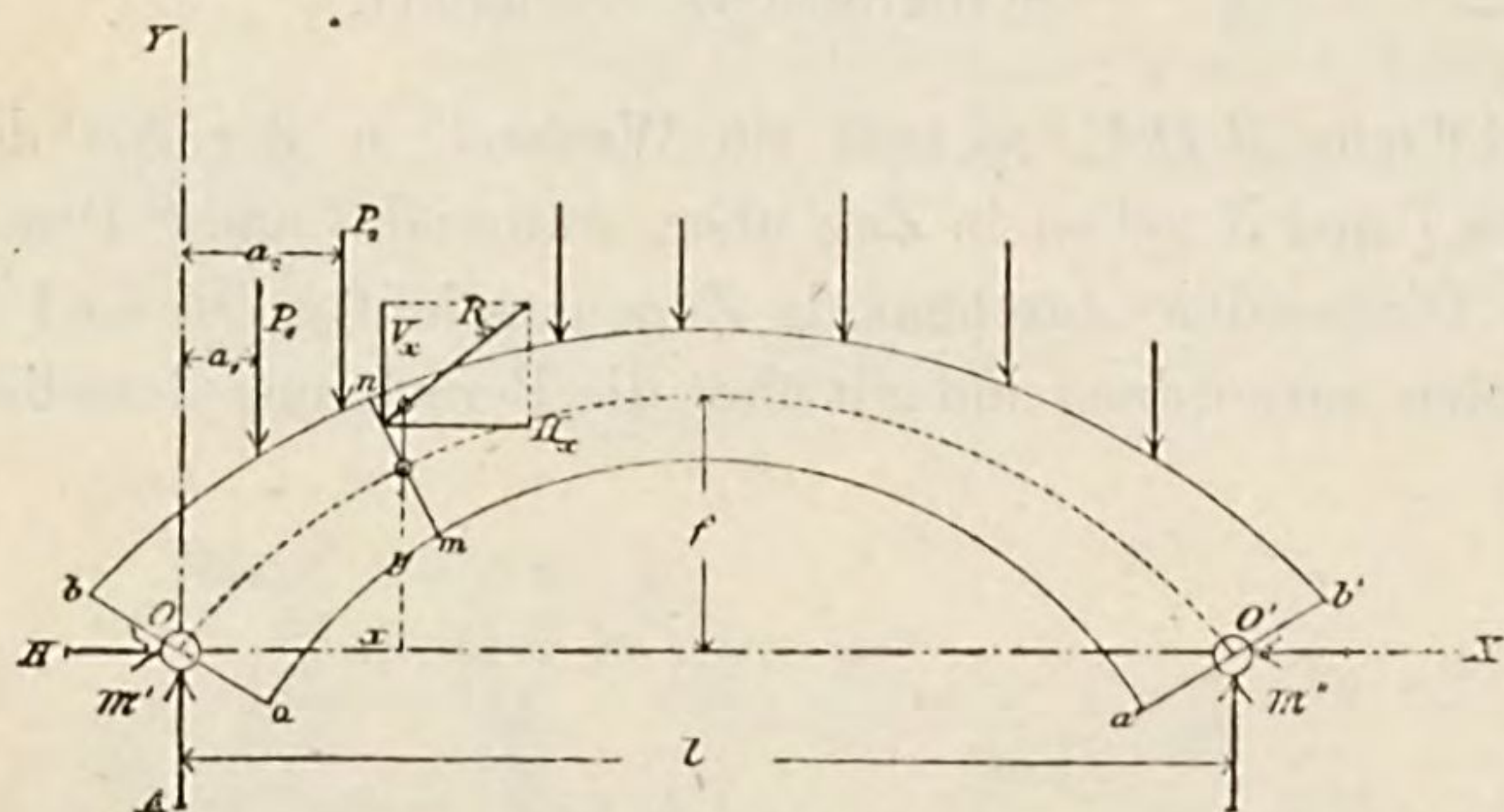
Der elastische Bogenträger.

§ 1.

Der stabförmige elastische Bogenträger unter Einfluss von ruhender Belastung.

Ein Bogenträger Fig. 122, symmetrisch zur Scheitelverticalen sei durch feststehende verticale Lasten beansprucht: $P_1, P_2 \dots$ deren Entfernungen vom Schwerpunkt des linken Kämpferquerschnitts mit $a_1, a_2 \dots$ bezeichnet seien. Die Widerlagerreactionen W' und W'' , welche dieser Belastung das Gleichgewicht halten, werden im Allgemeinen die Kämpferquerschnitte nicht in deren Schwerpunkten (Auflagerpunkten) schneiden. Man verlege daher jede derselben parallel ihrer anfänglichen Richtung nach diesen Schwerpunkten indem man Kräftepaare hinzufügt, deren Momente bezüglich der betreffenden Auflagerpunkte $\mathfrak{M}'$ beziehungsweise $\mathfrak{M}''$

Fig. 122.



seien. Die so verschobenen Widerlagerreactionen zerlegen man in ihre Horizontal- und Verticalcomponenten, welche bezüglich des linken Auflagers mit H und A bezeichnet seien.

Es stelle nun $m\ n$ einen beliebigen Querschnitt vor, dessen Schwerpunkt bezüglich des rechtwinkligen

Coordinatensystems Fig. 122 mit dem Anfangspunkt in O die Coordinaten x und y habe. Bezeichnet R_x die Resultirende der rechts vom Querschnitt wirkenden äusseren Kräfte, $\mathfrak{M}_x$ das Moment derselben bezüglich des Querschnittschwerpunktes und H_x , V_x ihre Horizontal- und Verticalcomponente, so ergibt sich auf Grund der statischen Gleichgewichtsbedingungen:

$$H_x = H \dots \dots \dots (152)$$

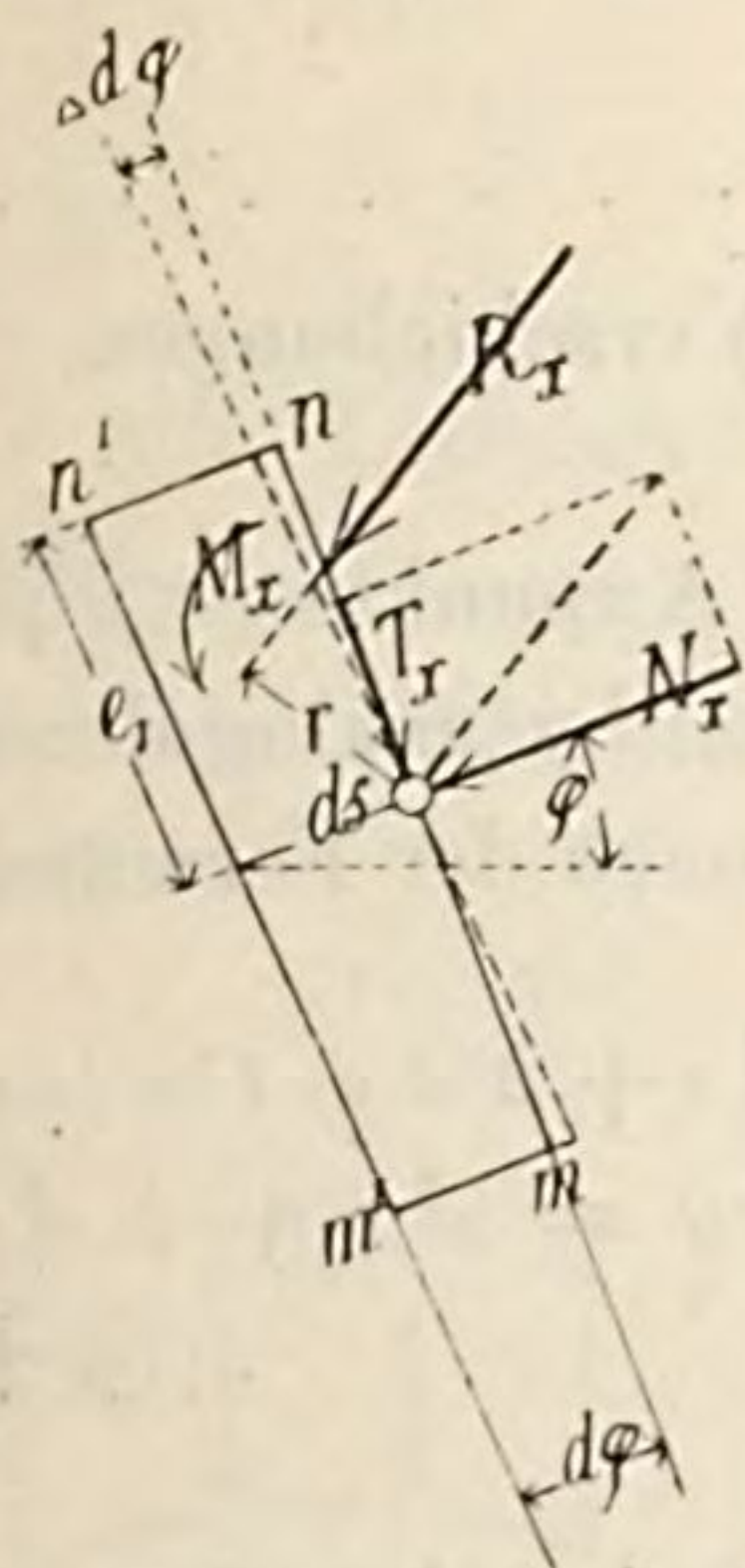
$$V_x = A - \sum_0^x P \dots \dots \dots (153)$$

$$\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}' + A x - H y - \sum_0^x P (x - a) \dots \dots \dots (154)$$

Diese Gleichungen reichen zur Bestimmung der Unbekannten nicht aus, wesshalb zur Aufstellung weiterer Bedingungsgleichungen die Gesetze der elastischen Formänderung zu Hülfe genommen werden müssen.

Es sei zu diesem Ende $m n n' m'$ (Fig. 123) ein Bogenelement von der sehr kleinen Länge ds , dessen Begrenzungsquerschnitte den Winkel $d\varphi$ bilden und welches sich unmittelbar an den betrachteten Querschnitt anschliesst. Unter

Fig. 123.



Hinzufügung eines Kräftepaares vom Momente $M_x = R_x \cdot r$ transferire man die Resultierende R_x nach dem Schwerpunkt des Querschnitts und zerlege dieselbe hier in eine Normalcomponente N_x und eine parallel zum Querschnitt wirkende Scheerkraft T_x . Durch die Axialkraft N_x wird eine parallele Verschiebung des Querschnitts $m n$ angestrebt, während M_x eine Drehung desselben um den Winkel $\Delta d\varphi$ bezüglich seiner Schwerpunktsaxe bewirkt.

Bezeichnet β' die Spannung, welche durch die angestrebte Drehung, also durch M_x in der äussersten, um e_1 vom Schwerpunkt abstehenden Faser entsteht, ist ferner $\Delta ds'$ die hiedurch hervorgebrachte Längenänderung dieser Faser, endlich Θ das Trägheitsmoment des Querschnitts, so hat man:

$$M_x = \frac{\beta'}{e_1} \Theta,$$

und wenn bei grossem Krümmungsradius von der verhältnissmässig schwachen Krümmung des Balkens abgesehen, d. h. $m n n' m'$ als Parallelepiped betrachtet wird, nach Gl. 2 Th. II, S. 1

$$\frac{\Delta ds'}{ds} = \frac{\beta'}{\varepsilon},$$

oder, da

$$\Delta ds' = e_1 \Delta d\varphi,$$

$$\beta' = \frac{\varepsilon e_1 \Delta d\varphi}{ds}.$$

Dieser Werth in den Ausdruck für M_x eingeführt gibt:

$$\Delta d\varphi = \frac{M_x}{\varepsilon \Theta} ds \quad \dots \quad (155)$$

Da für jedes Element eine solche Drehung stattfindet und diese Winkeländerung zugleich eine Drehung aller folgenden Elemente veranlasst, so erhält man die gesammte Winkeländerung zwischen den Querschnitten x_1 und x_2 :

$$\Delta \varphi_{x_2} - \Delta \varphi_{x_1} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_x}{\varepsilon \Theta} ds,$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_x}{\varepsilon \Theta} \frac{dx}{\frac{ds}{dx}}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_x}{\varepsilon \Theta} \frac{dx}{\cos \varphi}$$

Für $x=l$ wird $y=0$ und Gl. 154 geht über in:

$$\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M}' + A l - \sum_0^1 P(l-a),$$

daher
$$A = \frac{1}{l} \left[\mathfrak{M}'' - \mathfrak{M}' + \sum_0^1 P(l-a) \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (166)$$

Führt man diese Werthe zugleich mit $p = \frac{l^2}{8f}$ in die Gleichungen 163 bis 165 ein, so erhält man, wenn d_0 und c_0 die gegenseitige horizontale und verticale Verschiebung der Auflagerpunkte bezeichnet:

$$\Delta \varphi_1 = \Delta \varphi_0 + \frac{l}{2K} \left[\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'' - \frac{4}{3} Hf + \frac{1}{l} \sum_0^1 P(l-a)a \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (167)$$

$$\Delta l = d_0 = e t l + \frac{l f}{3K} \left[\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'' - \frac{8}{5} Hf + \frac{1}{l^3} \sum_0^1 P(a l^3 - 2 a^3 l + a^4) \right] \quad . \quad . \quad (168)$$

$$\Delta y_{x=1} = c_0 = l \Delta \varphi_0 + \frac{l^2}{3K} \left[\mathfrak{M}' + \frac{1}{2} \mathfrak{M}'' - Hf + \frac{1}{2l^2} \sum_0^1 (2 a l^2 - 3 a^2 l + a^3) \right] \quad . \quad . \quad (169)$$

Aus diesen drei Gleichungen ergeben sich die drei Unbekannten:

$$H = \frac{15}{4f l^3} \sum_0^1 P a^2 (l-a)^2 + \frac{45 K e t}{4f^2} - \frac{15 K}{2lf} \left(\frac{3 d_0}{2f} + \Delta \varphi_0 - \Delta \varphi_1 \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (170)$$

$$\mathfrak{M}' = \frac{1}{2l^3} \sum_0^1 P a (l-a)^2 (5a - 2l) + \frac{15 K e t}{2f} - \frac{3 K}{l} \left(\frac{5 d_0}{2f} + \frac{2 c_0}{l} + \Delta \varphi_0 - 3 \Delta \varphi_1 \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (171)$$

$$\mathfrak{M}'' = \frac{1}{2l^3} \sum_0^1 P a^2 (l-a) (3l - 5a) + \frac{15 K e t}{2f} - \frac{3 K}{l} \left(\frac{5 d_0}{2f} - \frac{2 c_0}{l} - \Delta \varphi_1 + 3 \Delta \varphi_0 \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (172)$$

Sind die Auflager unverrückbar fest und werden Temperatureinflüsse nicht berücksichtigt, so erhält man, da $\Delta \varphi_0 = 0$, $\Delta \varphi_1 = 0$, $d_0 = 0$, $c_0 = 0$, $t_0 = 0$,

$$H = \frac{15}{4f l^3} \sum_0^1 P a^2 (l-a)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (173)$$

$$\mathfrak{M}' = \frac{1}{2l^3} \sum_0^1 P a (l-a)^2 (5a - 2l) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (174)$$

$$\mathfrak{M}'' = \frac{1}{2l^3} \sum_0^1 P a^2 (l-a) (3l - 5a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (175)$$

Temperaturänderung allein um t^0 bewirkt:

$$H_{(t)} = \frac{45 K e t}{4f^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (176)$$

$$\mathfrak{M}'_{(t)} = \mathfrak{M}''_{(t)} = \frac{15 K e t}{2f} = \frac{2}{3} H_{(t)} f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (177)$$

Ein Ausweichen der Trägerenden bewirkt (wenn wie früher $\Delta \varphi_0$ die Drehung des linken, $\Delta \varphi_1$ die des rechten Kämpferquerschnitts, d_0 die horizontale und c_0 die verticale Verschiebung der Auflagerpunkte bezeichnen):

$$H = - \frac{15 K}{2lf} \left(\frac{3 d_0}{2f} + \Delta \varphi_0 - \Delta \varphi_1 \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (178)$$

$$\mathfrak{M}' = - \frac{3 K}{l} \left(\frac{5 d_0}{2 f} + \frac{2 c_0}{l} + \Delta \varphi_0 - 3 \Delta \varphi_l \right) \quad (179)$$

$$\mathfrak{M}'' = - \frac{3 K}{l} \left(\frac{5 d_0}{2 f} - \frac{2 c_0}{l} - \Delta \varphi_l + 3 \Delta \varphi_0 \right) \quad (180)$$

Tritt aber nur eine Aenderung der Spannweite um d_0 ein, keine Drehung und Senkung der Widerlager, so ist

$$\frac{H}{(d_0)} = - \frac{45 K d_0}{4 l f^2} \quad (181)$$

und $\mathfrak{M}'_{(d_0)} = \mathfrak{M}''_{(d_0)} = - \frac{15 K d_0}{2 l f} = \frac{2}{3} \frac{H}{(d_0)} f \quad (182)$

Besteht die Gesamtbelastung des Bogens aus einer an beliebiger Stelle a angreifenden Einzellast, so ist nach Gl. 173 bis 175

$$H = \frac{15}{4 f l^3} P a^2 (l - a)^2, \quad (183)$$

$$\mathfrak{M}' = \frac{1}{2 l^3} P a (l - a)^2 (5 a - 2 l), \quad (184)$$

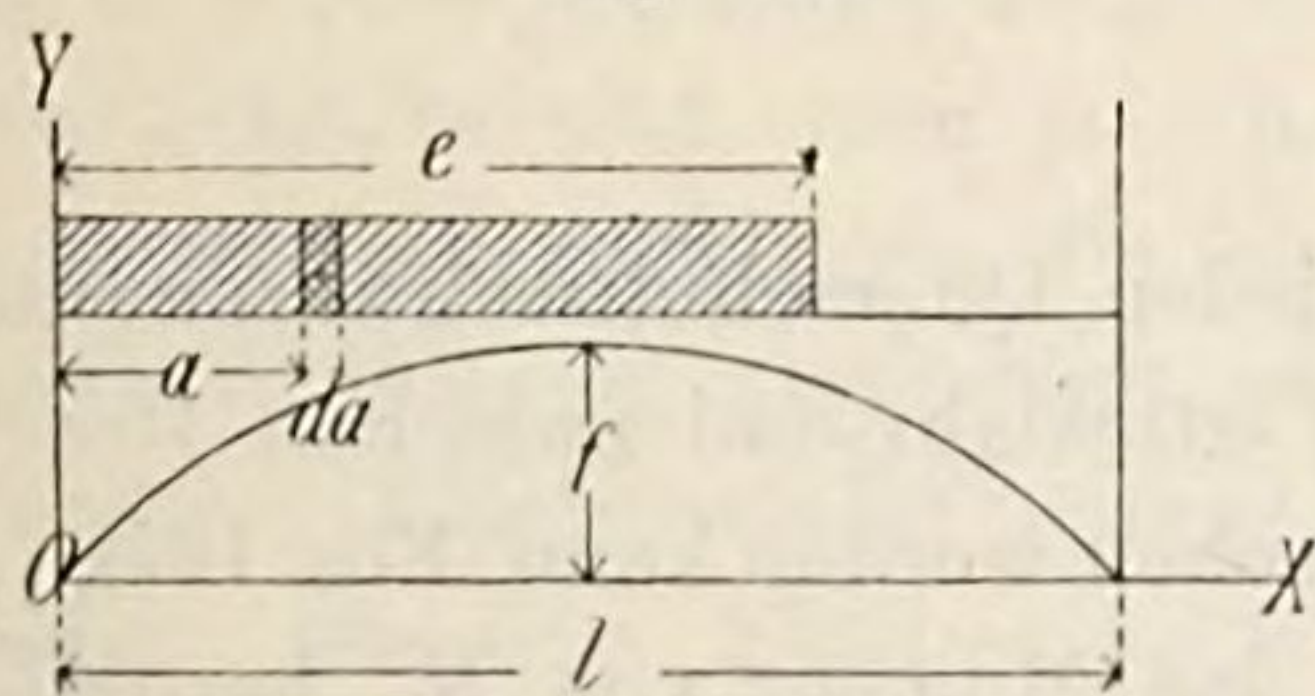
$$\mathfrak{M}'' = \frac{1}{2 l^3} P a^2 (l - a) (3 l - 5 a) \quad (185)$$

und nach Gl. 166:

$$A = \frac{1}{l^3} P (l - a)^2 (l + 2 a) \quad (186)$$

Vorstehende Gleichungen können benützt werden, um die einer gleichmässig vertheilten Belastung entsprechenden Werthe des Horizontalschubs, der Auflagermomente und Auflagerreactionen abzuleiten. Erstreckt sich die Last (q pro Längeneinheit) vom linken Auflager anfangend, auf die Länge e des Trägers (Fig. 126), so ist in den Gleichungen 183 bis 186 $P = q d a$ zu setzen und zwischen den Grenzen 0 und e zu integrieren. Man erhält:

Fig. 126.



$$H = \frac{q e^3}{8 f l^3} (10 l^2 - 15 e l + 6 e^2) \quad (187)$$

$$\mathfrak{M}' = \frac{q e^2}{2 l^3} (3 l^2 e - 3 l e^2 - l^3 + e^3) \quad (188)$$

$$\mathfrak{M}'' = \frac{q e^3}{2 l^3} (l^2 - 2 e l + e^2) \quad (189)$$

$$A = \frac{q e}{l^3} (l^3 - l e^2 + \frac{e^3}{2}) \quad (190)$$

Für $e = l$ ergibt sich

$$H = \frac{q l^2}{8 f}, A = \frac{q l}{2}, \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'' = 0.$$

Durch $\mathfrak{M}'$ und H , beziehungsweise $\mathfrak{M}''$ und H sind auch die Angriffsorte der Widerlagerreactionen W' und W'' bestimmt. Denn bezeichnen w' und w'' die Ordinaten derjenigen Punkte, in welchen W' und W'' die Auflagerverticalen schneiden, so hat man, weil in Bezug auf den erstgenannten Schnittpunkt das Moment von W' und in Bezug auf den letzteren das Moment von W'' gleich Null sein muss,

$$w' = \frac{\mathfrak{M}}{H} \text{ und } w'' = \frac{\mathfrak{M}''}{H} \quad (191)$$

1. Die erste dieser Gleichungen sagt, dass die Summe der zwischen Bogenaxe (starkgezeichnete Linie Fig. 128) und Drucklinie $\alpha \beta \gamma \delta$ liegenden Flächen gleich Null ist, wenn die auf verschiedenen Seiten der Bogenaxe befindlichen Flächen mit verschiedenen Vorzeichen versehen werden.

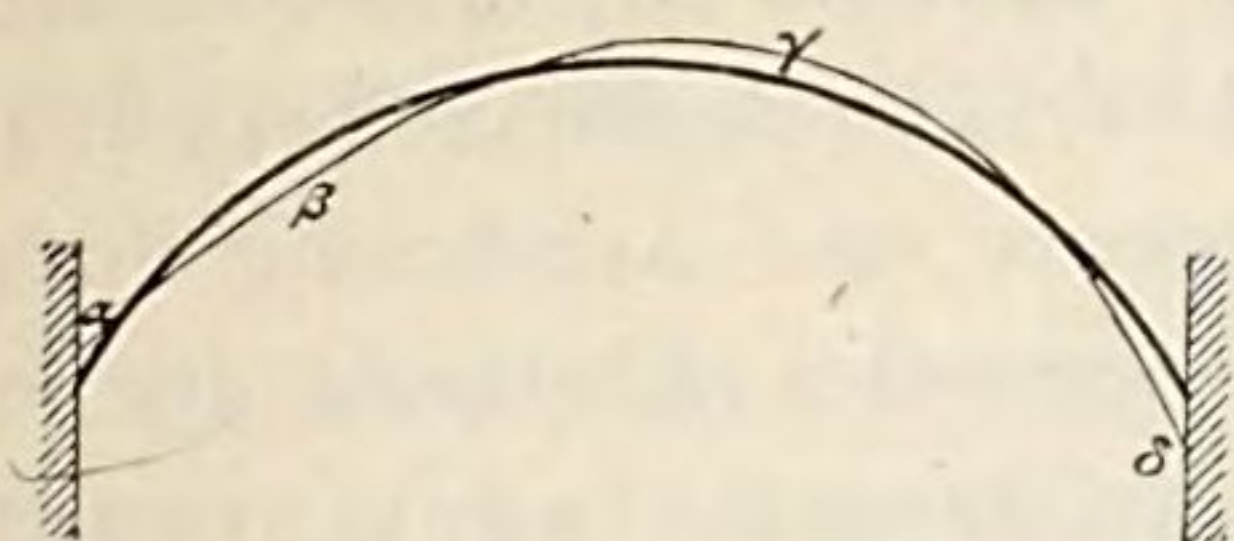


Fig. 128.

2. Gleichung 197 bringt zum Ausdruck, dass das statische Moment der gesamten zwischen Bogenaxe und Drucklinie befindlichen Fläche bezüglich der Y-Axe gleich Null ist. Mit Rücksicht auf Gl. 195 folgt daraus, dass die Schwerpunkte des negativen und des positiven Theiles jener Fläche in eine und dieselbe Verticale fallen.

3. Um Gl. 196 zu deuten, denke man sich die zwischen Bogenaxe und Drucklinie gelegenen Flächenelemente von der Höhe z vertical so verschoben, dass ihre Mitten in die Bogenaxe zu liegen kommen. Das statische Moment der so entstehenden Fläche ist dann, wenn für deren einzelne Abtheilungen die früheren Vorzeichen beibehalten werden, bezüglich der X-Axe gleich Null und positiver und negativer Theil dieser Fläche haben eine gemeinsame horizontale Schweraxe.

Da auch für die so verschobene Fläche die Sätze 1 und 2 Gültigkeit haben, so folgt, dass positiver und negativer Theil letztgedachter Fläche, an Grösse einander gleich, einen gemeinschaftlichen Schwerpunkt besitzen.*)

Aus den drei Gleichungen: 195 bis 197 geht also hervor, dass Drucklinie und Bogenaxe sich mindestens dreimal schneiden müssen.

Ein Schnittpunkt nämlich muss zunächst vorhanden sein, damit die Fläche zwischen Bogenaxe und Drucklinie nach Gl. 195 in einen positiven und einen negativen Theil getrennt werde. Nach Gl. 197 ist aber ein einziger Schnittpunkt nicht möglich, weil dann die beiden Flächen zu beiden Seiten desselben gleich gross sein müssten, folglich ihr statisches Moment bezüglich der Y-Axe nicht gleich Null sein könnte. Nimmt man sonach zwei Schnittpunkte als vorhanden an, so würde die fragliche Fläche zwischen Bogenaxe und Drucklinie in drei Theile, zwei negative und einen positiven zerfallen, von welchen das mittlere Stück doppelt so gross sein müsste als die beiden anderen. Die Summe der $\int z y dx$ dieser drei Theile kann nun unmöglich wie Gl. 196 bedingt, gleich Null sein, weil die dem mittleren Flächentheile entsprechenden y -Werthe grösser sind als diejenigen der beiden äusseren Flächentheile, und wird daher die Axe von der Drucklinie mindestens dreimal geschnitten.

Beider graphostatischen Bestimmung des elastischen Bogenträgers kommt es darauf an, diejenige Drucklinie zu finden, welche Seilpolygon der Belastung ist und zugleich den Bedingungen Gl. 195 bis 197 entspricht. Die bis jetzt bekannt gewordenen Lösungen dieser Aufgabe erreichen nur einen sehr geringen

*) Bei parabelförmiger Bogenaxe geht Gl. 196 über in: $\int_0^1 \frac{4f}{l^2} (lx - x^2) z dx = 0$,

$$\text{oder, da } \int_0^1 z x dx = 0,$$

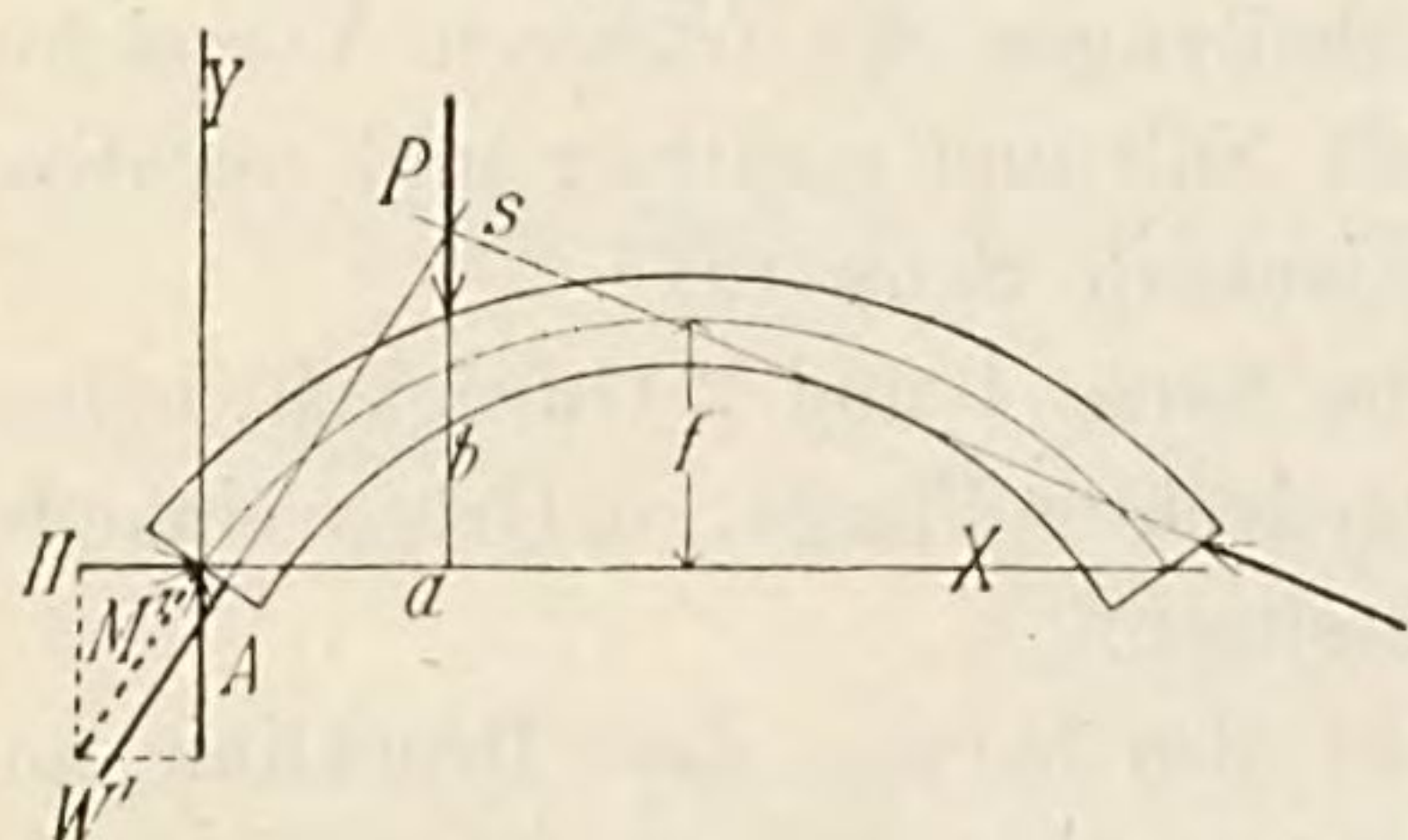
$$\text{in: } \int_0^1 z x^2 dx = 0,$$

d. h. das Trägheitsmoment der von Bogenaxe und Drucklinie eingeschlossenen Fläche bezüglich der Y-Axe, oder mit Rücksicht auf Gl. 195 u. 197 bezüglich jeder Verticalaxe ist gleich Null.

Grad von Genauigkeit, indem sie auf der Vergleichung der Grösse und gegenseitigen Lage der von Drucklinie und Bogenaxe eingeschlossenen und in allen Fällen sehr schmalen Flächenstreifen beruhen. Zudem ist man, um die Lösung zu ermöglichen gezwungen, von der ursprünglichen Bogenaxe auszugehen, während streng genommen die erwähnten Bedingungsgleichungen sich auf die deformirte Bogenaxe beziehen. Denn sobald der Bogen belastet wird, erleidet die Bogenaxe eine Aenderung ihrer Lage und die z -Werthe der Fig. 127 bezeichnen die verticalen Abstände der jeweiligen Resultirenden von den Schwerpunkten der Querschnitten nach eingetretener Aenderung. Es soll daher auf jene Methoden hier nicht näher eingegangen und nur das gemischt rechnerisch-graphische Verfahren erwähnt werden, welches auf der Bestimmung der Schnittlinie der Kämpferdrücke und der Umhüllungslinie der Kämpferdrücke basirt.

Es wirke auf den Bogenträger eine Einzellast P Fig. 129, welche die Entfernung

Fig. 129.



a vom linken Auflager hat. Dieselbe wird zwei Widerlagerreactionen W' , W'' hervorbringen, welche sich, da sie der Einzellast das Gleichgewicht halten, in einem Punkte s der Kraftlinie P schneiden. Da das Moment von W' bezüglich des Punktes s , dessen Coordinaten a und b seien, gleich Null ist, M' , A und H aber W' ersetzen, so ist,

$$M' + A a - H b = 0,$$

oder:

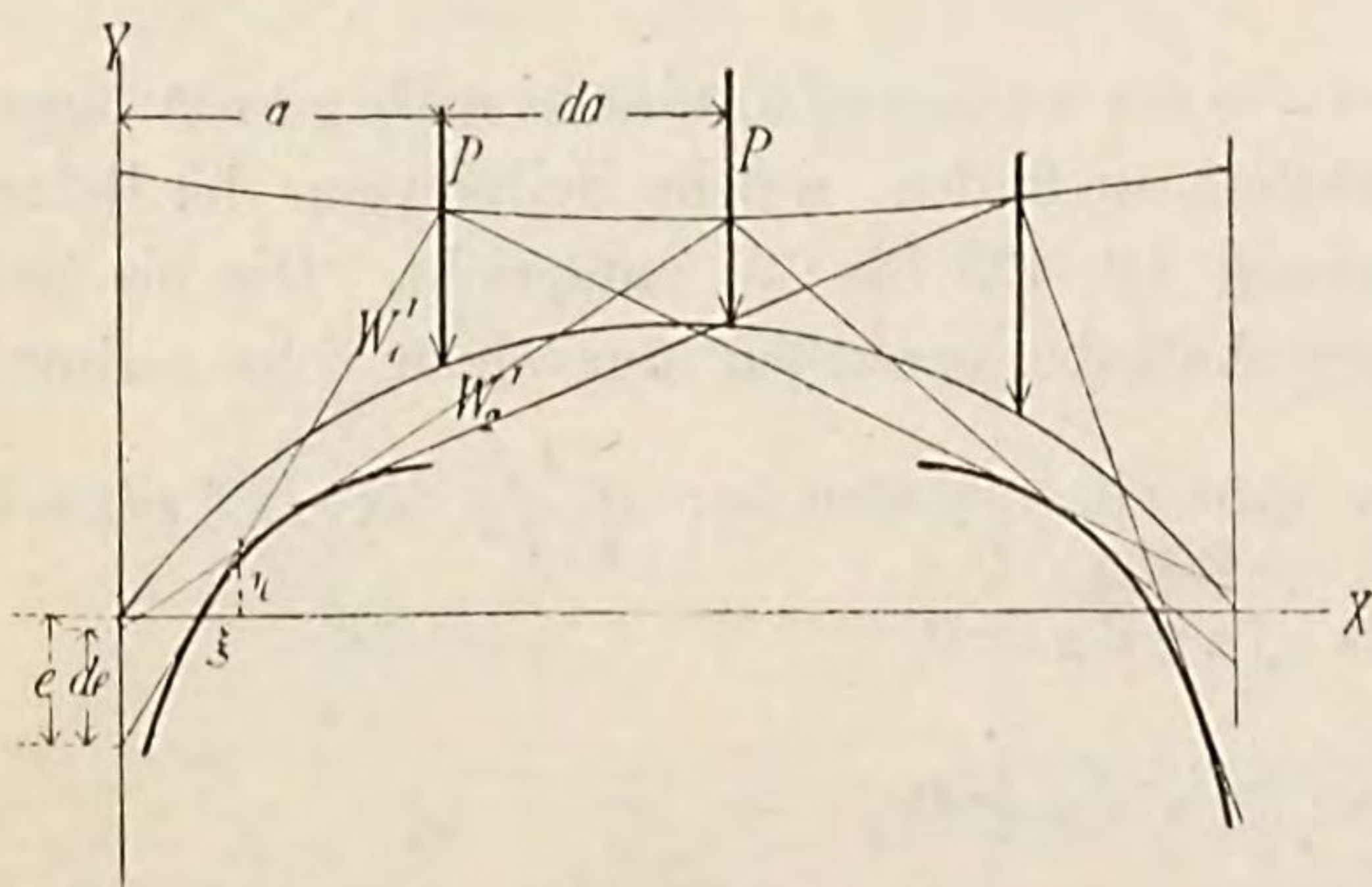
$$b = \frac{M' + A a}{H} \quad \dots \quad (198)$$

Lässt man P nach einander alle Lagen von $a=0$ bis $a=l$ einnehmen, so beschreibt der Punkt s eine stetige Curve, die „Schnittlinie der Kämpferdrücke“, deren Gleichung durch 198 gegeben ist. Führt man in dieselbe die einer Einzellast entsprechenden Werthe H , M' , A , der Gleichungen 183, 184 und 186 ein, so erhält man als Gleichung der Schnittlinie der Kämpferdrücke für den Parabelbogen:

$$b = \frac{6}{5} f \quad \dots \quad (199)$$

d. h. die Schnittlinie der Kämpferdrücke ist hier eine horizontale Gerade, welche um $\frac{1}{5}$ der Pfeilhöhe über dem Scheitel der Bogenaxe liegt.

Fig. 130.



Mit dem Fortschreiten der Einzellast P nimmt nicht nur der Punkt s andere Lagen ein, sondern es ändern sich auch die Kraftlinien der Widerlagerreactionen. Letztere umhüllen hierbei zwei Curven, welche „Umhüllungslinien der Kämpferdrücke“ genannt werden.*) Jede derselben kann als der geometrische Ort des Schnittpunktes zweier sehr nahe auf

einander folgender Kämpferdrücke betrachtet werden.

*) Die Umhüllungslinien der Kämpferdrücke wurden zuerst von Winkler dargestellt.

Demnach sei W_1' Fig. 130 linksseitiger Kämpferdruck der um a von Y entfernten Einzellast P , ξ_1 und η_1 seien die fortlaufenden Coordinaten dieser Geraden W_1' , α ihr Neigungswinkel gegen den Horizont und e die Ordinate ihres Schnittpunktes mit der Auflagerverticalen, so hat man als Gleichung von W_1' :

$$\eta_1 = e + \xi_1 \tan \alpha.$$

Rückt P um da weiter, so ändert sich e um de , $\tan \alpha$ um $d \tan \alpha$ und die Gleichung des neuen Kämpferdrucks W_2' dessen lfd. Coordinaten mit ξ_2 und η_2 bezeichnet seien, lautet:

$$\eta_2 = e + de + \xi_2 (\tan \alpha + d \tan \alpha).$$

Für den Schnittpunkt beider Geraden ist $\xi_1 = \xi_2 = \xi$, $\eta_1 = \eta_2 = \eta$, daher durch Subtraction:

$$\xi = - \frac{de}{d \tan \alpha}$$

und

$$\eta = e - de \frac{\tan \alpha}{d \tan \alpha}.$$

Da $\tan \alpha = \frac{A}{H}$ und $e = \frac{\mathfrak{M}'}{H}$ (Gl. 191), so erhält man:

$$\xi = \frac{H d \mathfrak{M}' - \mathfrak{M}' d H}{A d H - H d A} \quad \dots \quad (200)$$

und

$$\eta = \frac{A d \mathfrak{M}' - \mathfrak{M}' d A}{A d H - H d A} \quad \dots \quad (201)$$

Substituirt man die dem Parabelbogen entsprechenden Werthe H , A , $\mathfrak{M}'$ der Gl. 183, 184 u. 186 und die Differenziale dieser Werthe nach a , so ergibt sich:

$$\xi = \frac{al}{2(a+l)} \quad \dots \quad (202)$$

$$\eta = \frac{(6al^2 - 5a^3 - l^3) 2f}{(l^2 - a^2) 15a} \quad \dots \quad (203)$$

und wenn der aus den ersten dieser Gleichungen folgende Werth von a in die zweite eingesetzt wird:

$$\eta = \frac{f}{15l\xi} (14l\xi - 4\xi^2 - l^2) \quad \dots \quad (204)$$

als Gleichung der Umhüllungslinie der linken Kämpferdrücke. Diese Curve ist eine Hyperbel.

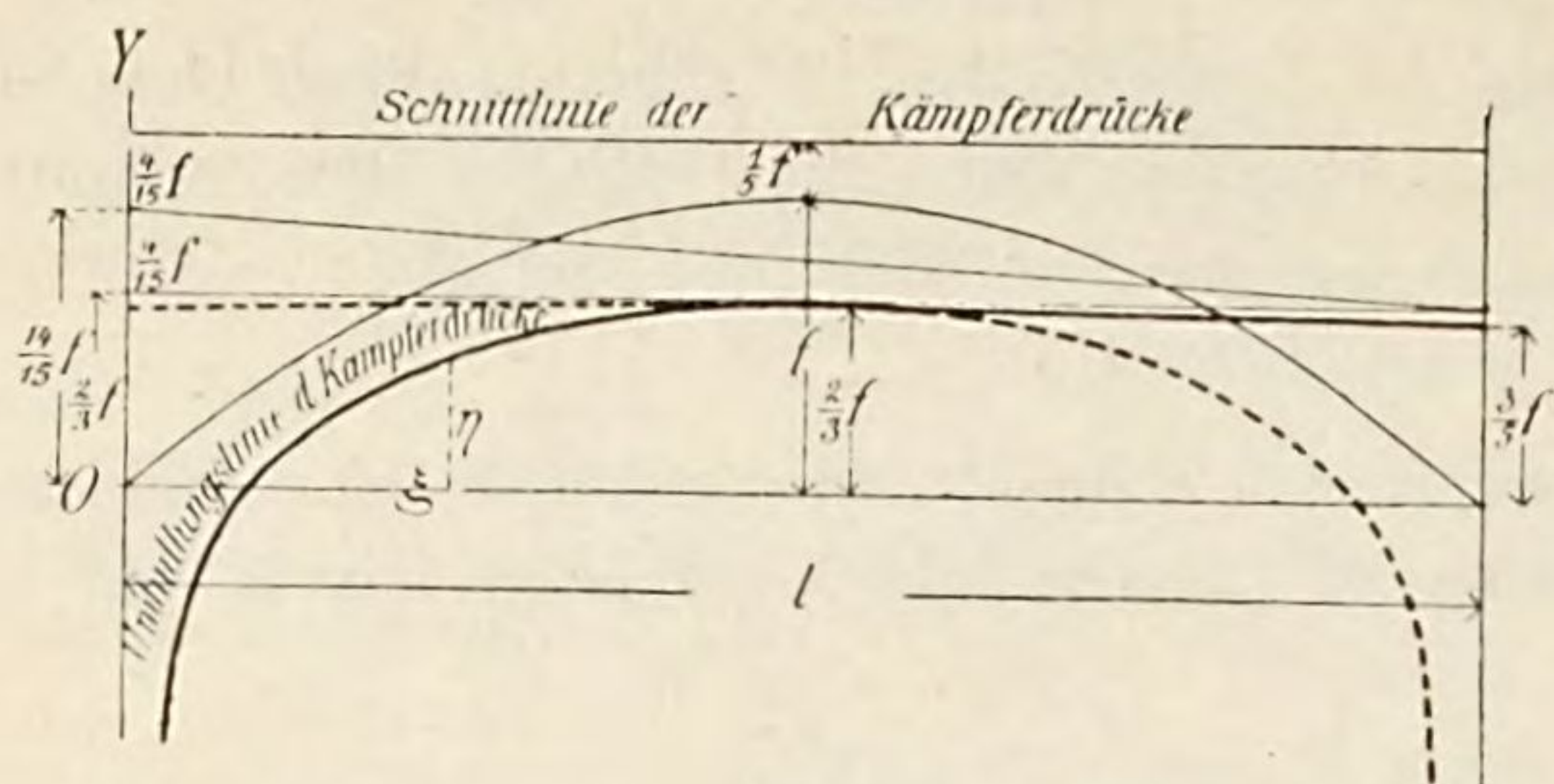
Da
$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{f}{15} \left(\frac{l}{\xi^2} - \frac{4}{l} \right),$$

so ist für $\xi = 0 \quad \eta = -\infty \quad \text{und} \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \infty$

„ $\xi = \frac{l}{2} \quad \eta = \frac{2}{3} f \quad \text{und} \quad \frac{d\eta}{d\xi} = 0$

„ $\xi = l \quad \eta = \frac{3}{5} f \quad \text{und} \quad \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{f}{5l}.$

Fig. 131.



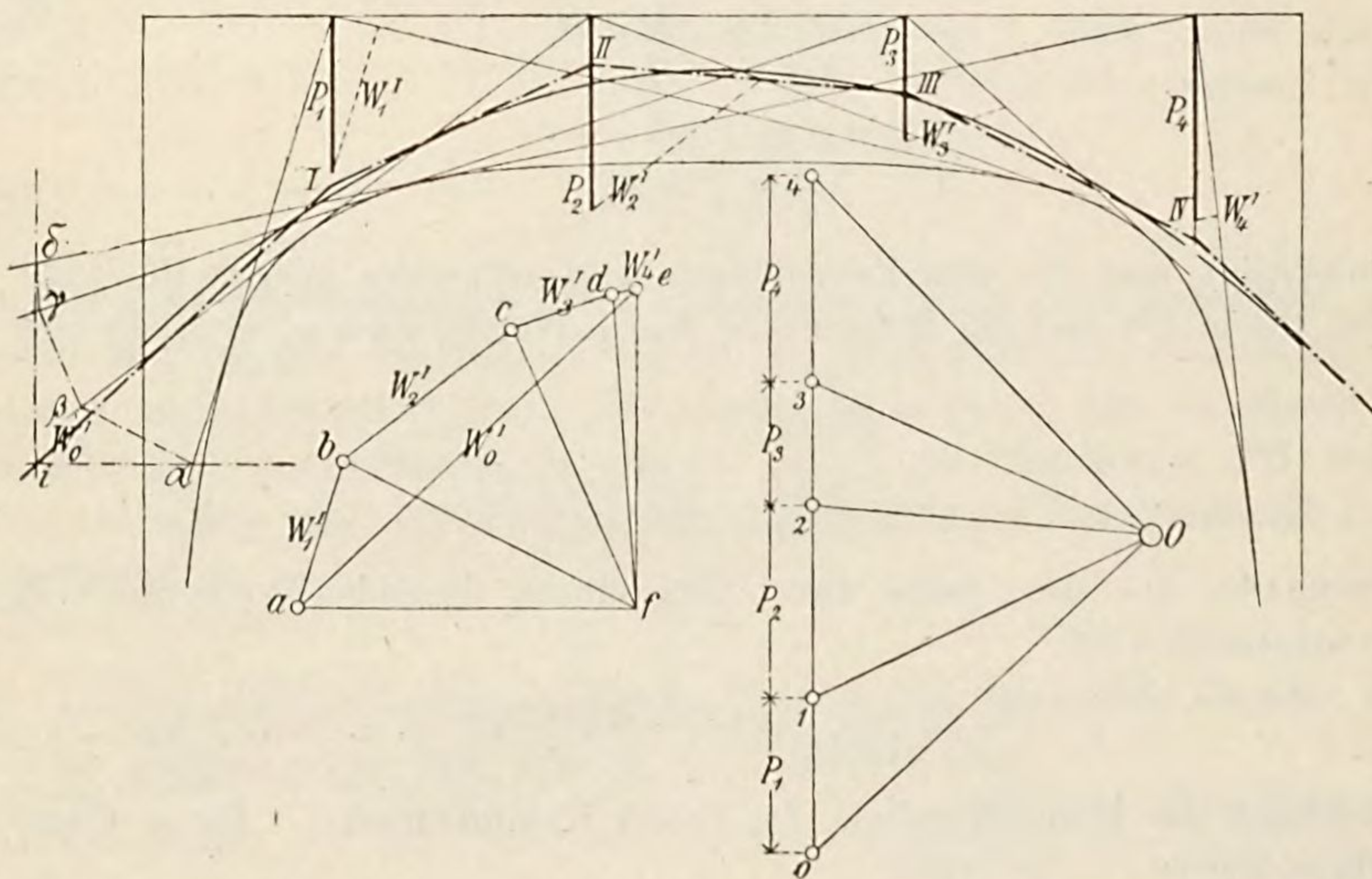
Die eine Asymptote fällt mit der Y-Axe zusammen, die andere ist eine geneigte Gerade, bei $x=0$ durch die Ordinate $\frac{14}{15}f$ und bei $x=l$ durch die Ordinate $\frac{2}{3}f$ bestimmt.

(Fig. 131) Die Hyperbel

hat für $\xi = \frac{l}{2}$ im Abstand $\frac{2}{3}f$ von der X-Axe eine horizontale Tangente mit welcher sie in die symmetrisch zur Scheitelverticalen gelegene Umhüllungslinie der rechtsseitigen Kämpferdrücke übergeht.

Sind Schnittlinie und Umhüllungslinien der Kämpferdrücke auf solche Weise festgestellt, so kann man, auch wenn der Träger durch eine grössere Anzahl Lasten beliebig beansprucht ist, die Widerlagerreactionen jeder Einzellast Fig. 132 durch Zerlegung

Fig. 132.



derselben nach den jetzt bekannten Richtungen der Kämpferdrücke graphisch sofort angeben. Durch Vereinigung der zusammengehörigen Einzelreactionen ergeben sich die resultierenden Widerlagerreactionen, z. B. die linksseitige W_0' als Länge ae und deren Angriffsort mittels des Seilpolygons $\alpha\beta\gamma\delta$ in der Geraden iI . Trägt man die Lasten in der Fig. 132 angegebenen Weise auf und macht man $0O = ae = W_0'$, so ist das mit Pol 0 von iI aus construierte Seilpolygon die Drucklinie des Bogens.

§ 2.

Der stabförmige elastische Bogenträger bei beweglicher Belastung.

Die ungünstigste Beanspruchung eines gegebenen Bogenquerschnitts bei variabler Belastung kann mit Hülfe der Schnitt- und Umhüllungslinie der Kämpferdrücke

gefunden werden, wenn zuvor der Kern des Querschnitts, beziehungsweise, weil Kraftebene und eine Querschnittshauptaxe hier zusammenfallen, die beiden in dieser Hauptaxe gelegenen Kernpunkte bekannt sind. Nach Gl. 38 erhält man die Entfernungen k' und k'' des oberen und unteren Kernpunktes (K' , K'') vom Schwerpunkt aus den Formeln:

$$k' = \frac{\Theta}{F'n} \quad k'' = \frac{\Theta}{F'm},$$

in welchen n und m die Abstände der unteren und der oberen Querschnittskante vom Schwerpunkt bezeichnen. Bestimmt man hienach die Kernpunkte für alle Querschnitte, so erhält man als Verbindungslinien zwei Curven, welche Kernlinien genannt werden.

Ungünstigste Beanspruchung bezüglich der Normalkräfte und Normalspannungen.

Wir haben mit R_x die Resultirende der rechts von dem Querschnitt wirkenden äusseren Kräfte bezeichnet und nennen dieselbe positiv, wenn sie gegen das linksseitige Trägerfragment drückend wirkt, hingegen negativ, wenn das Umgekehrte der Fall ist.

Fig. 133.

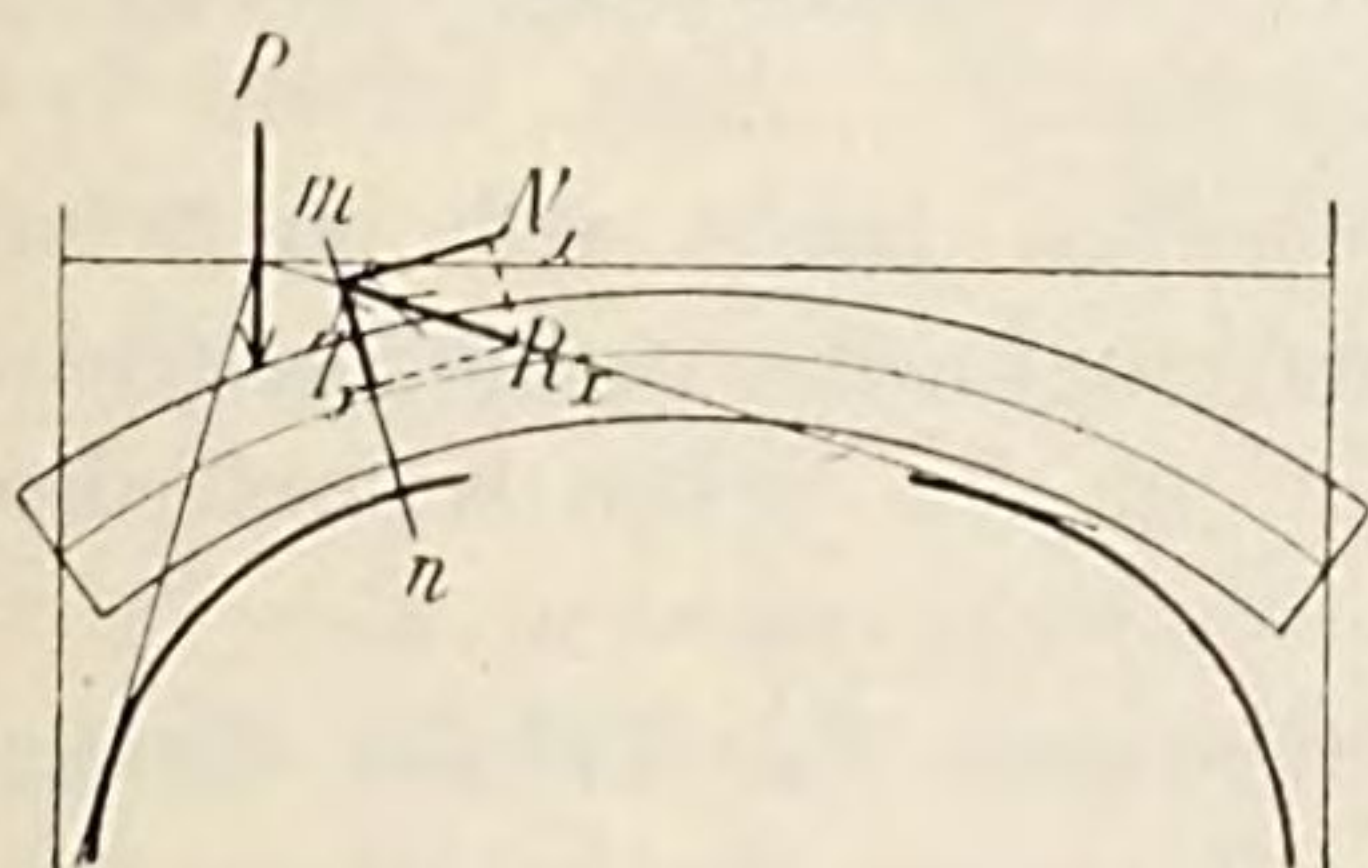
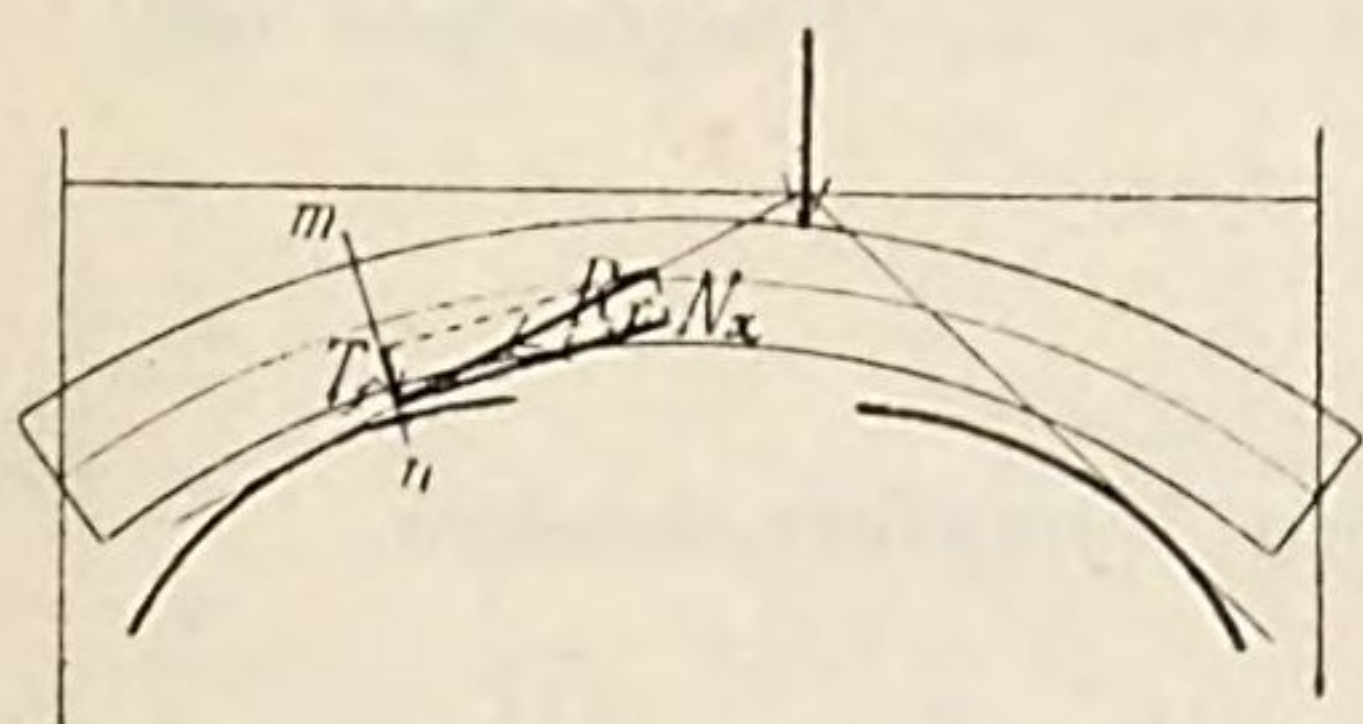


Fig. 134.



Hat man nun einen Querschnitt $m\ n$ Fig. 133 und links von demselben, d. h. links von der durch die obere Querschnittsgrenze gelegten Verticalen, eine Einzellast P , so besteht die Resultirende der äusseren Kräfte für den Querschnitt in der rechtsseitigen Widerlagerreaction, positiv wie die Pfeilrichtung Fig. 133 andeutet und es ergeben sich aus derselben durch Zerlegung in Componenten senkrecht und parallel zum Querschnitt nach Grösse, Richtung und Lage auch N_x und T_x .

Befindet sich P rechts vom Querschnitt (Fig. 134) so erhält man die Resultirende der äusseren Kräfte des Querschnitts als umgekehrte linke Widerlagerreaction, demnach mit demselben Vorzeichen wie im vorbetrachteten

Fall. Daraus ist zu entnehmen, dass jede Last, ob rechts oder links vom Querschnitt befindlich, positive R_x also auch positive Normalkräfte N_x im Querschnitt erzeugt.

Demnach entsteht bei jeder Art von Belastung in der Axe des Bogenträgers nur Druck und könnten auch in allen übrigen Bogentheilen nur Druckspannungen vorkommen, wenn nicht zugleich auch die Lage des Angriffsorts J der Resultirenden R_x von Einfluss wäre auf das Vorzeichen der Normalspannungen einzelner Theile des Querschnitts. Man weiss nämlich, dass an der Unterkante des Querschnitts Zugspannungen auftreten, wenn der Angriffsort der Resultirenden über den oberen Kernpunkt K' nach aufwärts hinausrückt. Die Grenzstellungen also der Einzellast, welchen die Normalspannung gleich Null an der Querschnittsunterkante entspricht, werden erhalten, wenn man vom genannten Kernpunkt K' Tangenten an die Umhüllungslinien der Kämpferdrücke zieht und bis zum Schnitt mit der Schnittlinie der Kämpferdrücke

d. h. die Verticalcomponenten der Auflagerreactionen sind identisch mit den Auflagerreactionen des geraden, mit beiden Enden frei aufliegenden, gleich langen und gleich belasteten Tragbalkens.

Die Winkeländerung zwischen den Querschnitten 0 und x ist

$$\Delta \varphi_x - \Delta \varphi_0 = \frac{1}{K} \int_0^x \mathfrak{M}_x dx, \quad (157)$$

die Aenderung der Längen x und y

$$\Delta x = e t x - \int_0^x \Delta \varphi dy \quad (161)$$

$$\Delta y = e t y + \int_0^x \Delta \varphi dx \quad (162)$$

Hieraus können $\Delta \varphi_0$, $\Delta \varphi_l$ und H unter Berücksichtigung von Gl. 208 bestimmt werden.

Für den symmetrischen Parabelbogenträger folgt, wenn d_0 als gegeben zu betrachten ist,

$$H = \frac{5}{8 f l^3} \sum_0^1 P a (l^3 - 2 a^2 l + a^3) + \frac{15}{8} \frac{K}{f^2 l} (e t l - d_0) \quad . . . (209)$$

Wenn Temperatureinflüsse nicht berücksichtigt werden und eine Aenderung der Spannweite nicht eintritt, ist:

$$H = \frac{5}{8 f l^3} \sum_0^1 P a (l^3 - 2 a^2 l + a^3) \quad (210)$$

Der Einfluss einer Temperaturdifferenz um t^0 allein erzeugt:

$$\underset{(t)}{H} = \frac{15 K e t}{8 f^2} ; \quad (211)$$

und der Einfluss des Ausweichens der Widerlager allein:

$$\underset{(d_0)}{H} = - \frac{15 K d_0}{8 f^2 l} \quad (212)$$

Für eine an beliebiger Stelle angreifende Einzellast hat man:

$$H = \frac{5}{8 f l^3} P a (l^3 - 2 a^2 l + a^3) \quad (213)$$

und

$$A = \frac{1}{l} P (l - a) \quad (214)$$

Einer, die Strecke $x = e$ bedeckenden, gleichförmig vertheilten Belastung entspricht:

$$\begin{aligned} H &= \frac{5}{8 f l^3} \int_0^e q da a (l^3 - 2 a^2 l + a^3) \\ &= \frac{q e^2}{16 f l^3} (5 l^3 - 5 e^2 l + 2 e^3) \quad (215) \end{aligned}$$

wenn

$$e = l, \text{ ist } H = \frac{q l^2}{8 f} \quad (216)$$

Die Gleichung der Schnittlinie der Kämpferdrücke wird nach 198

$$b = \frac{A a}{H}, \quad (217)$$

oder nach Einführung der Werthe aus 216 und 217:

$$b = \frac{8 f l^2}{5 (l^2 + l a - a^2)} \quad (218)$$

An die Stelle der Umhüllungslinien der Kämpferdrücke treten hier die Gelenkpunkte, in welchen sich sämtliche (zusammengehörige) Widerlagerreactionen schneiden. Die ungünstigsten Belastungen werden unter Berücksichtigung dieser Vereinfachung wie beim Bogenträger ohne Gelenk festgestellt.

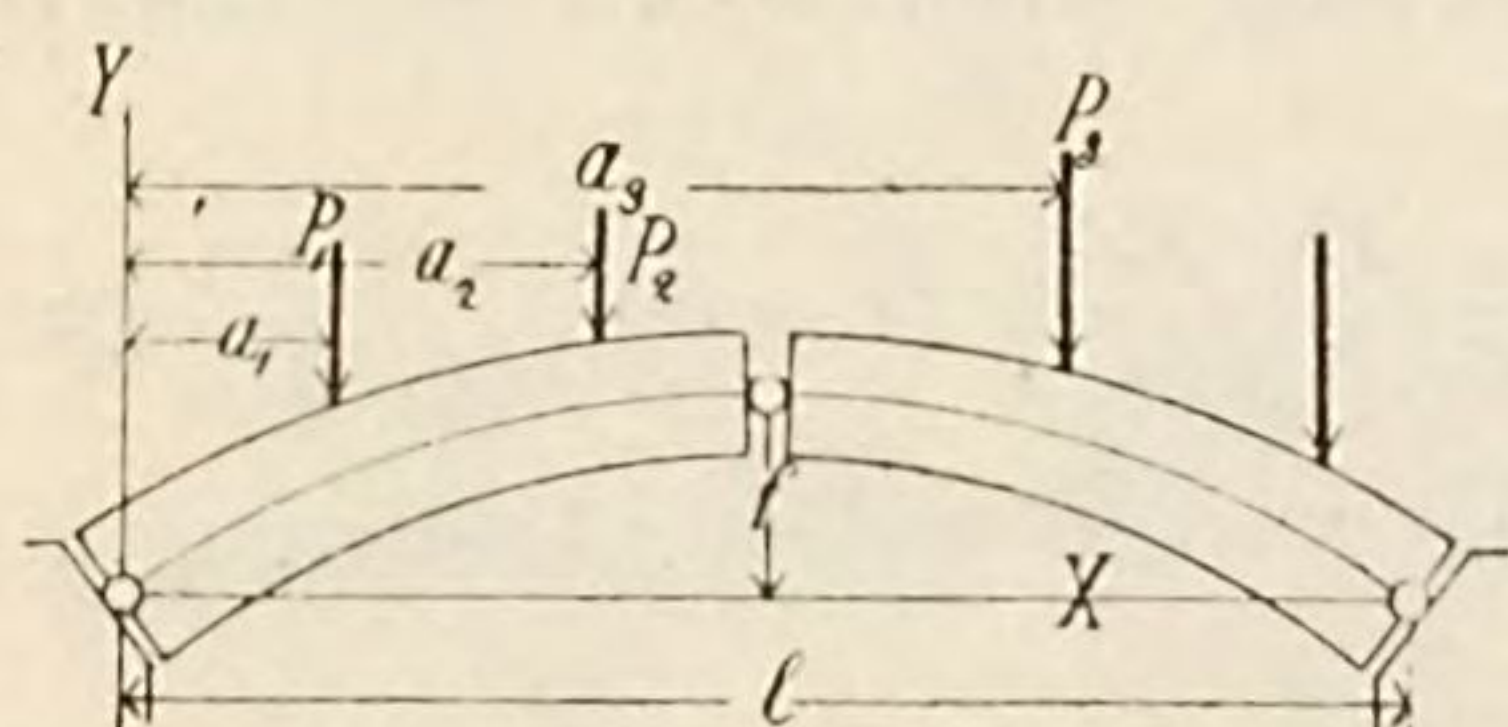
§ 4.

Der stabförmige elastische Bogenträger mit drei Gelenken.

Derselbe entsteht, wenn zu den Kämpfergelenken noch ein Gelenk im Scheitel hinzukommt. (Fig. 137).

Die Gleichgewichtsbedingungen sind:

Fig.137.



[illegible]

$$V_x = A - \sum_0^x P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (220)$$

$$\mathfrak{M}_x = A_x - H_y - \sum_0^x P(x - a) \dots \quad (221)$$

Da $\mathfrak{M} \underset{x=1}{=} 0$ und $y \underset{x=1}{=} 0$

so folgt aus Gl. 224:

$$A = \frac{1}{l} \sum_0^l P(l - a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (222)$$

Eine weitere Gleichung liefert die Bedingung, dass $\mathfrak{M} = 0$ und $y = f$ ist.

Diese Werthe in Gl. 224 eingeführt ergeben :

$$H = \frac{1}{f} \left[A \frac{l}{2} - \sum_0^{\frac{1}{2}} P \left(\frac{l}{2} - a \right) \right],$$

oder wenn der Ausdruck für A aus Gl. 225 eingesetzt wird,

$$H = \frac{1}{f} \left[\frac{1}{2} \sum_0^l Pl - \frac{1}{2} \sum_0^l Pa - \frac{1}{2} \sum_0^{\frac{1}{2}} Pl + \sum_0^{\frac{1}{2}} Pa \right]$$

$$= \frac{1}{f} \left[\frac{1}{2} \sum_0^l Pl - \frac{1}{2} \sum_0^l Pa - \frac{1}{2} \sum_0^{\frac{1}{2}} Pl + \frac{1}{2} \sum_0^{\frac{1}{2}} Pa + \frac{1}{2} \sum_0^{\frac{1}{2}} Pa \right].$$

Durch Zusammenfassen des ersten und dritten, sowie des zweiten und vierten Summanden ergibt sich:

$$H = \frac{1}{f} \left[\frac{1}{2} \sum_0^{\frac{1}{2}} P_a + \frac{1}{2} \sum_{\frac{1}{2}}^l P_l - \frac{1}{2} \sum_{\frac{1}{2}}^l P_a \right]$$

oder

$$H = \frac{1}{2f} \left[\sum_0^{\frac{1}{2}} P_a + \sum_{\frac{1}{2}}^l P(l-a) \right], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (223)$$

welcher Ausdruck identisch ist mit Gl. 119 S. 98.

Bei gleichmässig vertheilter Belastung Fig. 138 ist

$$A = \frac{q e}{l} \left(l - \frac{e}{2} \right)$$

und nach Gl. 223

Fig. 138.

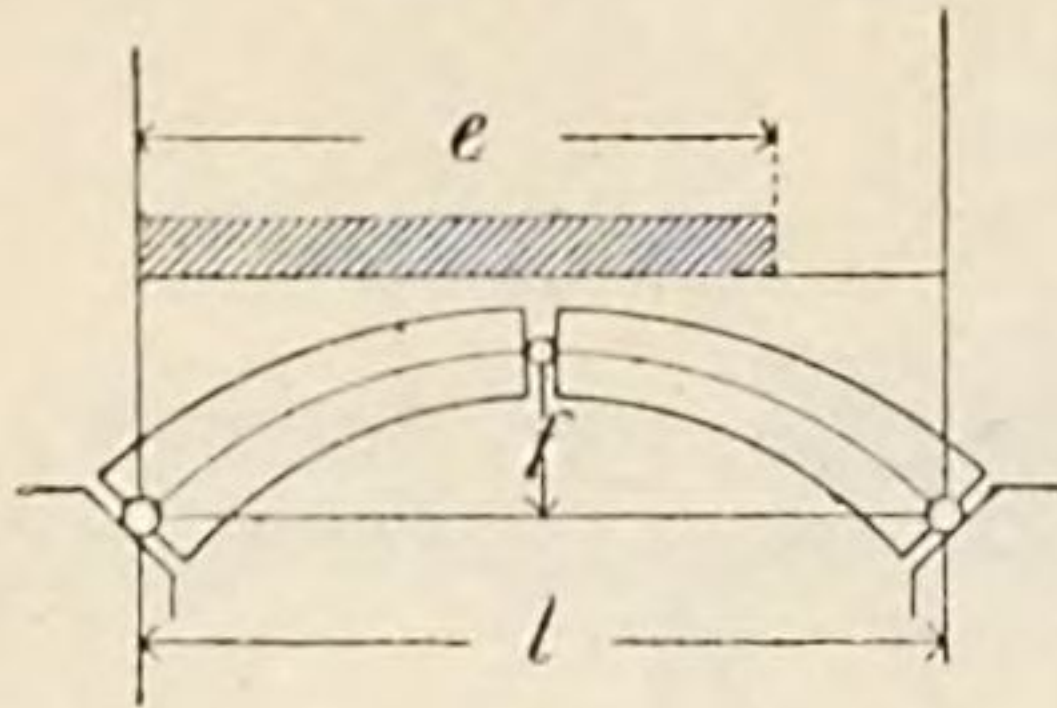
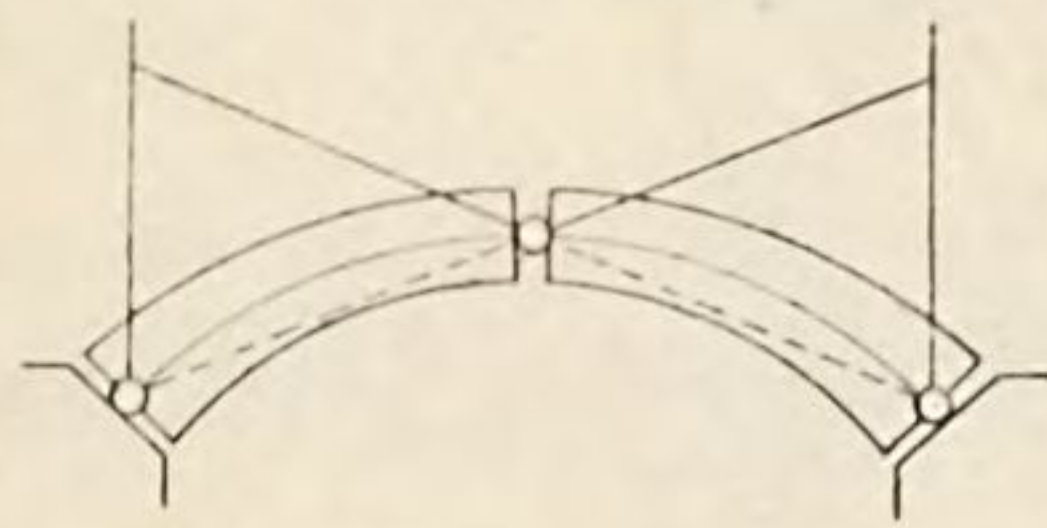


Fig. 139.



$$H = \frac{q}{2f} \left\{ \frac{l^2}{8} + \left(e - \frac{l}{2} \right) \left[\frac{l}{2} - \frac{e}{2} + \frac{l}{4} \right] \right\}$$

$$= \frac{q}{2f} \left(e l - \frac{e^2}{2} - \frac{l^2}{4} \right) \quad \dots \quad (224)$$

$$\text{für } e = l \text{ ist } H = \frac{q l^2}{8f} \quad \dots \quad (225)$$

Die elastischen Formveränderungen können aus den Gl. 157, 161 u. 162 gefunden werden. Die Umhüllungs-
linien der Kämpferdrücke gehen in die Kämpfer-
gelenkpunkte über und die Schnittlinien der Käm-
pferdrücke bestehen, wie leicht einzusehen, aus zwei
sich im Scheitelgelenk schneidenden Geraden, den
Verlängerungen der Verbindungslinien vom Scheitel
und Kämpfergelenken. (Fig. 139).

§ 5.

Der fachwerkförmige Bogenträger mit Kämpfergelenken.

Die Verticalcomponenten der Widerlagerreactionen sind (Vgl. S. 127) dieselben wie beim gleichbelasteten, mit den Enden frei aufliegenden Balkenträger. Zur Bestimmung des Horizontalschubs dient folgende Ueberlegung:

Die Belastung des Bogenträgers erzeugt in den einzelnen Constructionstheilen desselben Stabkräfte, durch welche Längenänderungen der Stäbe hervorgebracht resp. angestrebt werden. Die Deformation jedes einzelnen Stabes hat eine Aenderung der Lage sämtlicher übriger Stäbe zur Folge und die Summe sämtlicher Deformationen wird sich in einer Verschiebung der Widerlager äussern. Sind die Widerlager unverrückbar, so ergibt sich aus der Bedingung, dass diese Verschiebung gleich Null sei, eine Relation zur Bestimmung von H .

Bei den hier in Frage kommenden Trägern, welche aus Gurtungen und Füllungsgliedern bestehen, sind die von den letzteren herrührenden Deformationen gegenüber der Gesamtdeformation so gering, dass sie vernachlässigt werden können und demnach nur die Gurtungen als elastisch, die Füllungsglieder aber als starr zu betrachten sind.

Wir nehmen nun an, der Träger Fig. 140 sei am linken Auflager A unbeweglich festgehalten, so dass die gesammte Deformation in der Veränderung der Lage des rechtsseitigen Gelenkpunktes B zum Ausdruck kommt. Dehnt sich nun ein Gurtungsstab CD von der Länge a um die Strecke $DG = \Delta a$ aus, und wird zunächst noch vorausgesetzt, dass eine Längenänderung der übrigen Stäbe nicht eintrete, so findet man die neue Lage des Knotenpunktes D als Schnitt D' der beiden, von E mit dem Radius ED und von C mit dem Radius $a + \Delta a$ beschriebenen Kreisbögen. Wegen der Kleinheit von DG genügt es indessen, statt der Kreisbögen die beiden Geraden GD' senkrecht zu CG und DD' senkrecht zu ED zu ziehen. Die neue Lage des folgenden Knotenpunktes F ergibt sich jetzt, wenn von E aus mit der Länge EF und von D' aus mit der Länge $D'F$ Kreisbögen beschrieben

Einfluss der Temperatur.

Bezeichnet wie früher e die Längenänderung, welche ein Stab von der Länge $= 1$ durch eine Temperaturdifferenz von 1° C. erleidet, dann ist die durch einen Temperaturwechsel von $\pm t^{\circ}$ bewirkte Längenänderung Δl der Spannweite l :

$$\Delta l = +l e t^0.$$

Bei unverrückbaren Widerlagern tritt diese Aenderung der Spannweite nicht ein, wogegen an den Gelenkpunkten Reactionen entwickelt werden, welche, wenn die Auflagerpunkte gleich hoch, als Horizontalkräfte $= H$ auftreten.

Dabei finden in sämtlichen Gurtstäben Spannungen statt, welche man sich auch dadurch entstanden denken kann, dass auf den einen Gelenkpunkt des mit dem anderen befestigten Bogens die Aussenkraft H wirkt. Die hiedurch hervor-
gebrachte Horizontalverschiebung der Widerlager ist nach Gl. 226 und 228

$$\Delta l = \Sigma \left[\frac{\mathfrak{M} a y}{\varepsilon F t^2} \right]$$

oder, da $\mathfrak{M} = H_{\mathbf{y}}$,

$$\Delta l = \frac{H}{\varepsilon} \Sigma \left[\frac{a y^2}{F t^2} \right].$$

Aus der Gleichsetzung beider Werthe Δl erhält man den durch Temperaturveränderung von t^0 hervorgerufenen Horizontalschub:

$$H = \pm \frac{l e t^0 \varepsilon}{\Sigma \left[\frac{a y^2}{F t^2} \right]} (23)$$

Für Schmiedeeisen ist $\epsilon = 2000000$ kg pro qcm
 $e = 0,0000118$,

daher für $t^0 = 30^0$:

$$H = \pm \frac{708 l}{\Sigma \left[\frac{a y^2}{F t^2} \right]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (232)$$

§ 6.

Der fachwerkförmige Bogenträger ohne Gelenk.

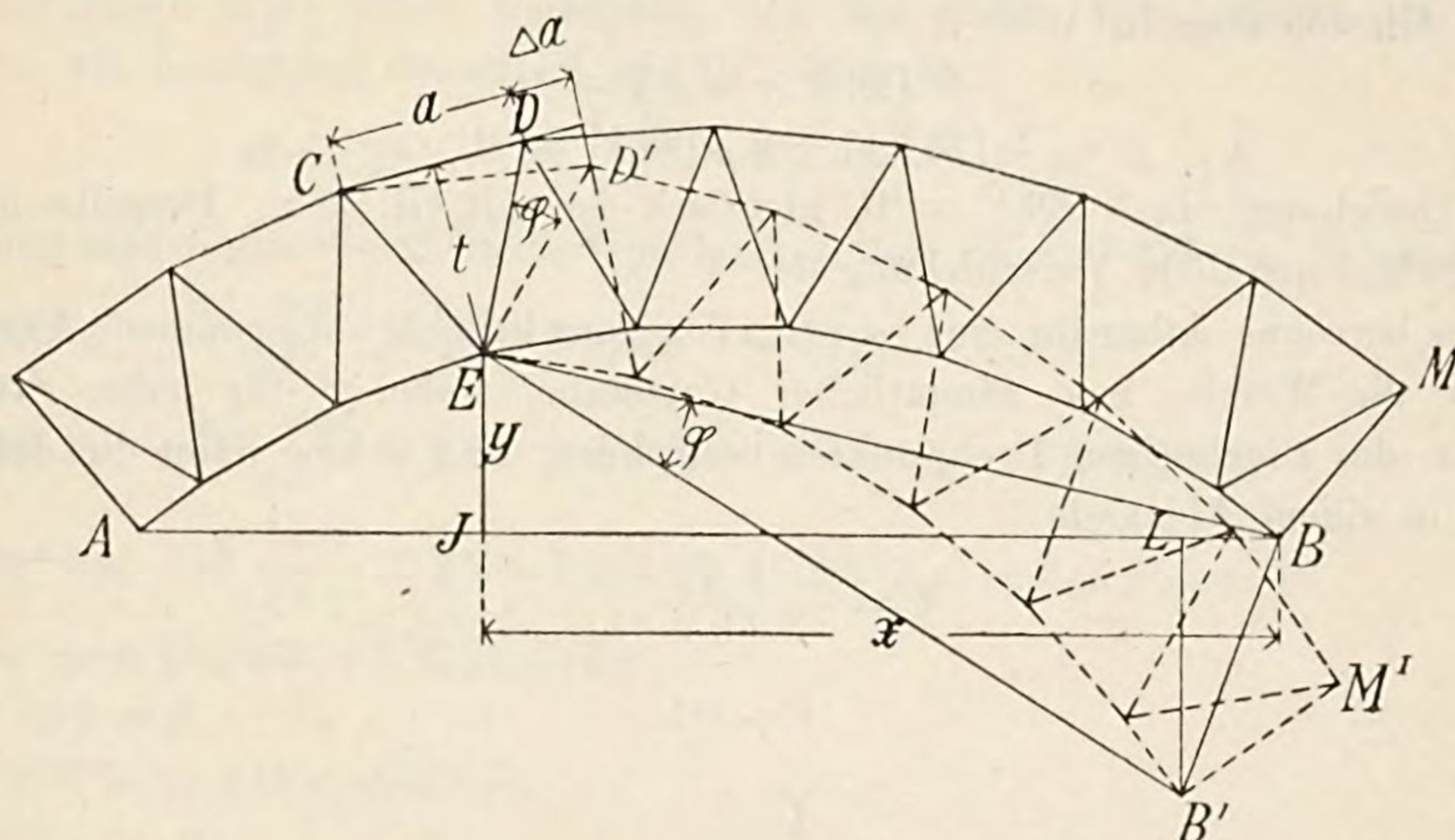
Beim Bogenträger ohne Gelenk sind unbekannt der Horizontalschub und die beiden Auflagermomente. Sind Letztere bestimmt, so sind nach Gl. 166 auch die Verticalprojectionen der Widerlagerreactionen gegeben. Die Auflagermomente können aber nach Gl. 191 auch durch die Ordinaten w' und w'' der Schnittpunkte der Widerlagerreactionen mit den Auflagerverticalen ausgedrückt werden.

Zur Bestimmung dieser drei Unbekannten H , w' , w'' dienen nun bei festen Widerlagern die Bedingungen, dass eine Verschiebung der Kämpfer in horizontalem und verticalen Sinn nicht eintrete und dass auch die angestrebte Drehung der Bogenenden, d. i. die Änderung des Neigungswinkels des Endstäbe gleich Null sei.

Erleidet ein Gurtstab CD von der Länge a Fig. 141 die Längenänderung Δa und bezeichnet t die Entfernung dieses Stabes vom Drehpunkt E , so ist wie früher

der Winkel, um welchen sich ED also auch BM dreht, gegeben durch $\varphi = \frac{\Delta a}{t}$ und die horizontale und verticale Verschiebung des Punktes B ist $\frac{\Delta a}{t} y$ resp. $\frac{\Delta a}{t} x$, wenn y und x die in Fig. 141 angegebene Bedeutung haben.

Fig. 141.



Man hat daher die Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}\Sigma \left[\frac{\Delta a}{t} \right] &= 0 \\ \Sigma \left[\frac{\Delta a}{t} y \right] &= 0 \\ \Sigma \left[\frac{\Delta a}{t} x \right] &= 0,\end{aligned}$$

wobei die Summierung sich über sämtliche Gurtstäbe zu erstrecken hat.

Nach Gl. 228 ist $\Delta a = \frac{\mathfrak{M} a}{\varepsilon F t}$,

daher wenn ε constant,

$$\begin{aligned}\Sigma \left[\frac{\mathfrak{M} a}{F t^2} \right] &= 0 \\ \Sigma \left[\frac{\mathfrak{M} a y}{F t^2} \right] &= 0 \\ \Sigma \left[\frac{\mathfrak{M} a x}{F t^2} \right] &= 0\end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung $\frac{a}{F t^2} = k$, ... (233)

welche Grösse ausschliesslich von der Form und den Dimensionen des Bogenträgers abhängig ist, so schreiben sich die vorstehenden Gleichungen:*)

*) Winkler, Beitrag zur Theorie der Bogenträger, Zeitsch. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1879 und Krohn, Beitrag zur Theorie der elastischen Bogenträger, Zeitsch. f. Baukunde 1880.

Setzt man den hieraus sich ergebenden Werth von A in Gl. 238 ein, so ist:

$$\mathfrak{M} = \frac{P_0 p_0}{l} \left(\frac{l}{2} - x \right) - P p - H \left[(w'' - w') \frac{l - 2x}{2l} + w' + y \right].$$

Der Werth: $\frac{P_0 p_0}{l} \left(\frac{l}{2} - x \right) - P p$ ist identisch mit dem entsprechenden Angriffsmoment eines gleich belasteten, mit den Enden frei aufruhenden Balkenträgers; wir bezeichnen denselben mit $\mathfrak{M}^*$, dann ist:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^* - H \left[(w'' - w') \frac{l - 2x}{2l} + w' + y \right].$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichungen 234, 235 und 236 ein, so erhält man:

$$\frac{1}{H} \Sigma [\mathfrak{M}^* k] - \frac{w'' - w'}{2l} \Sigma [(l - 2x) k] - w' \Sigma [k] - \Sigma [k y] = 0$$

$$\frac{1}{H} \Sigma [\mathfrak{M}^* k y] - \frac{w'' - w'}{2l} \Sigma [(l - 2x) k y] - w' \Sigma [k y] - \Sigma [k y^2] = 0$$

$$\frac{1}{H} \Sigma [\mathfrak{M}^* k x] - \frac{w'' - w'}{2l} \Sigma [(l - 2x) k x] - w' \Sigma [k x] - \Sigma [k y x] = 0.$$

Da nach Gl. 237 $d \Sigma [k] = \Sigma [k y']$

und $y' = y + d$,

so ist $d \Sigma [k] = \Sigma [k y] + d \Sigma [k]$

oder $\Sigma [k y] = 0$.

Da ferner, wenn der Bogen symmetrisch zur Y-Axe, auch

$$\Sigma [k x y] = 0$$

$$\text{und } \Sigma [k x] = 0,$$

so gehen vorstehende Gleichungen über in:

$$\frac{1}{H} \Sigma [\mathfrak{M}^* k] - \frac{w' + w''}{2} \Sigma [k] = 0$$

$$\frac{1}{H} \Sigma [\mathfrak{M}^* k y] - \Sigma [k y^2] = 0$$

$$\frac{1}{H} \Sigma [\mathfrak{M}^* k x] - \frac{w' - w''}{l} \Sigma [k x^2] = 0,$$

daher

$$H = \frac{\Sigma [\mathfrak{M}^* k y]}{\Sigma [k y^2]} \dots \dots \dots (239)$$

$$w' + w'' = \frac{2 \Sigma [\mathfrak{M}^* k]}{H \Sigma [k]} \dots \dots \dots (240)$$

$$w' - w'' = \frac{l \Sigma [\mathfrak{M}^* k x]}{H \Sigma [k x^2]} \dots \dots \dots (241)$$

aus welchen Gleichungen bei gegebener Belastung die Werthe H , w' und w'' berechnet werden können.

First paragraph of handwritten text, starting with a capital letter.

Second paragraph of handwritten text, continuing the narrative.

Third paragraph of handwritten text, detailing further events.

Fourth paragraph of handwritten text, providing more context.

Fifth paragraph of handwritten text, concluding the main body.

Sixth paragraph of handwritten text, possibly a final note or signature area.

Literatur.

Culmann, graphische Statik, Zürich 1866.

Winkler, Festigkeitslehre, Prag 1867.

Tetmajer, die äusseren und inneren Kräfte an statisch bestimmten Brücken- und Dachstuhlconstructionen, Zürich 1875.

Heinzerling, der Eisenhochbau der Gegenwart, Aachen 1876 und 1878.

Weyrauch, Festigkeit und Dimensionenberechnung der Eisen- und Stahl-Constructionen, Leipzig 1876.

Frauenholz, Bauconstructionslehre für Ingenieure, München 1877.

Loewe, Grundzüge zu Vorlesungen über eiserne Balkenbrücken, München 1877.

Intze, Tafeln und Beispiele für eine rationelle Verwendung des Eisens zu einfachen Bauconstructions Berlin 1878.

Weyrauch, Theorie der elastischen Bogenträger, München 1879.

Bauschinger, Elemente der graphischen Statik, München 1880.

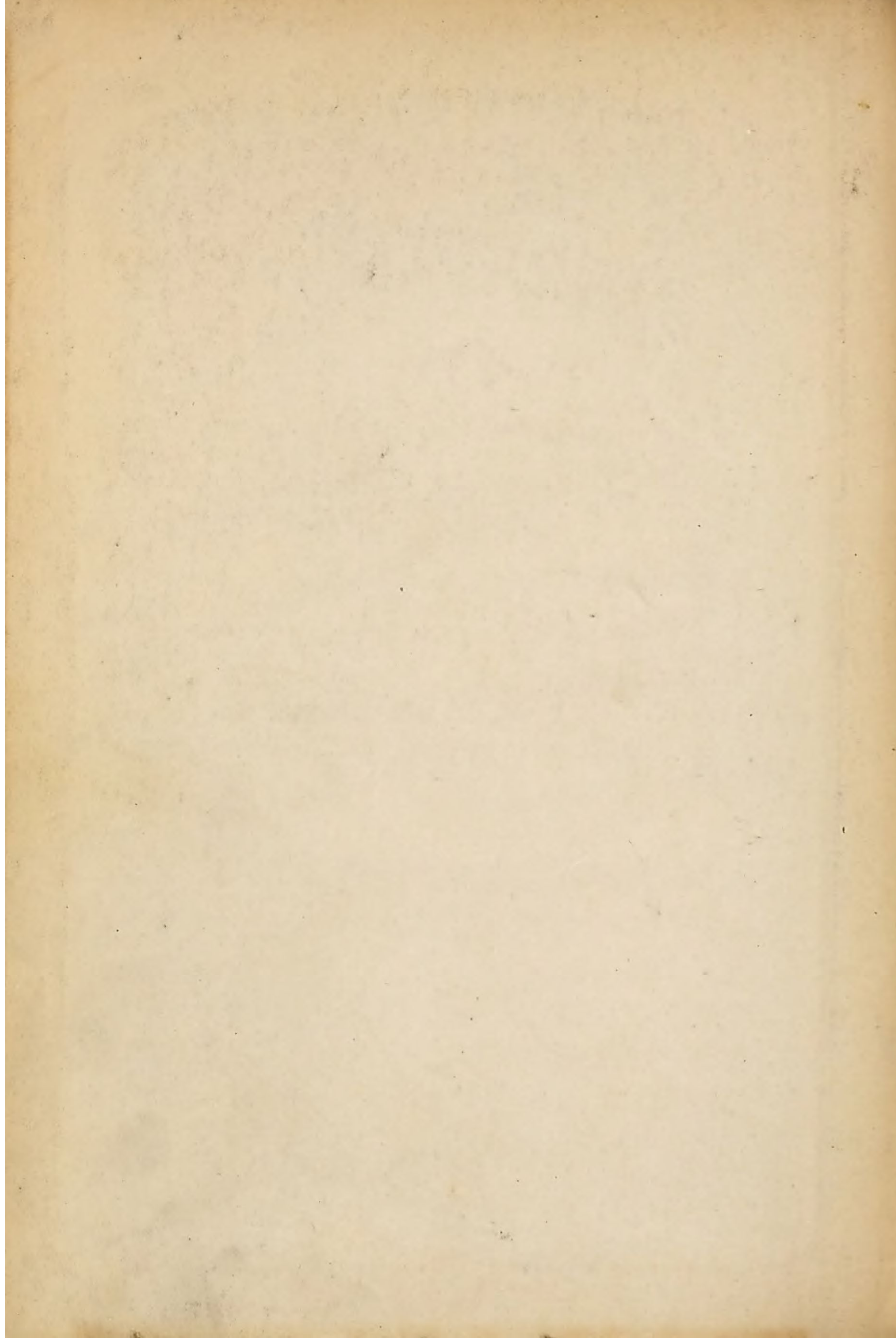
Bresse, Cours de mécanique appliquée, Paris 1880.

Deutsches Normalprofilbuch für Walzeisen, Aachen 1881.

Bericht über die Leistungen und Fortschritte im Hochbauwesen, herausgegeben von G. Wanderley, I. Th. Leipzig 1882.

Handbuch der Architectur, Th. I Bd. 1 Statik der Hochbauconstructions, Darmstadt 1882.

Kgl. Hof- und Universitäts-Buchdruckerei von Dr. C. Wolf & Sohn.



Wittmann, Wilhelm

Statik der Hochbauconstructionen

Bd.: 3

Berlin 1884

A.civ. 107 gf-1/3

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11536147-6